بسم الله الرحمن الرحیم

فیزیک ۲ — استاد سمیه محمدی

Subject:
Year: Month: Day:

میدان الکتریکی متغیر با زمان تشکیل میدان مغناطیسی می‌دهد و بالعکس.

الکتریسیته | مغناطیس → اورستد ← الکترومغناطیس

فارادی: توصیف کیفی

ماکسول: قوانین الکترومغناطیس → کشف ماهیت الکترومغناطیسی نور

۴ قانون کلی ↕ قوانین نیوتون

فصل ۲۱ - بار الکتریکی

بار الکتریکی خاصیتی است. بنجامین فرانکلین نامگذاری بارهای الکتریکی به صورت + و - را انجام داده.

کولن اولین شخصی است که یک رابطه برای بار الکتریکی ارائه داد.

واحد بار الکتریکی (C): مقدار باری که در واحد زمان از مقطع یک سیم حامل جریان 1A عبور می‌کند.

A.S

$1C = 6.24 \times 10^{18}$ (بار یک پروتون)

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

q_1 ——— r ——— q_2

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$K = 8.99 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

ضریب گذردهی خلاء $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N.m^2}$ → خلاء

Permitivity

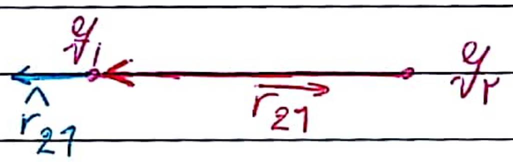
$K = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}$

خلاء

اگر محیط خلاء نباشد:

ضریب گذردهی محیط $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

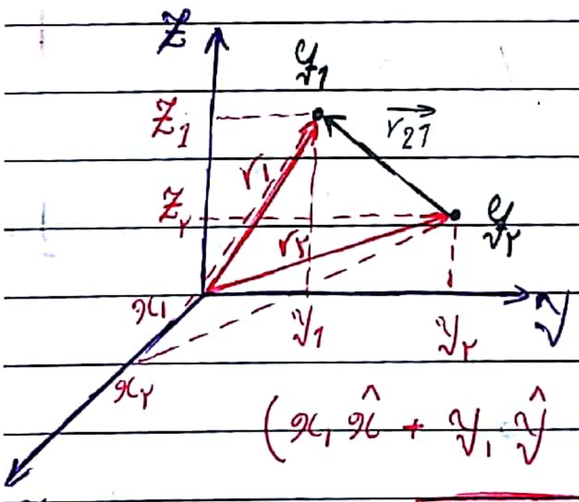
$|F| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$



$$\vec F_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|r_{21}|^2} \hat r_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|r_{21}|^3} \vec r_{21}$$

اگر q ها هم علامت باشند $\vec F_{21}$ هم جهت با $\hat r_{21}$ خواهد بود.

قانون کولن در مختصات کارتزین:



$$\vec F_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 |r_{21}|^3} r_{21}$$

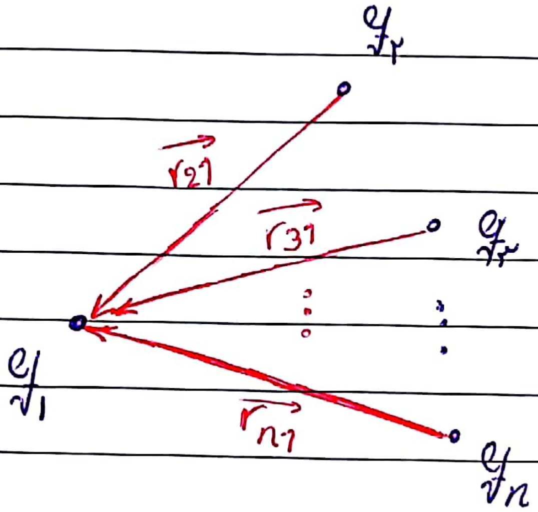
$$\vec r_{21} = \vec r_1 - \vec r_2 = (x_1 \hat i + y_1 \hat j + z_1 \hat k) - (x_2 \hat i + y_2 \hat j + z_2 \hat k)$$

$$|\vec r_{21}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

AIDIN

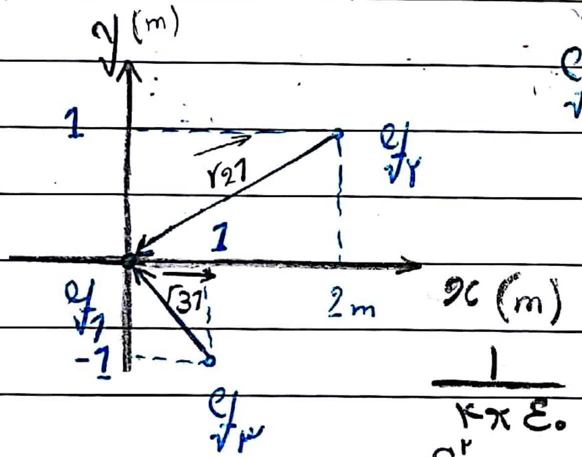
Subject:
Year: Month: Day:

محاسبه نیروی الکتریکی ناشی از بارهای نقطه‌ای گسسته:



$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 \left[\frac{q_2}{|\vec{r}_{21}|^3}\vec{r}_{21} + \frac{q_3}{|\vec{r}_{31}|^3}\vec{r}_{31} + \cdots + \frac{q_n}{|\vec{r}_{n1}|^3}\vec{r}_{n1} \right]$$

مثال: $q_1 = 1C \quad q_2 = 2C \quad q_3 = -1C$



$$\vec{f}_1 = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{31} =$$

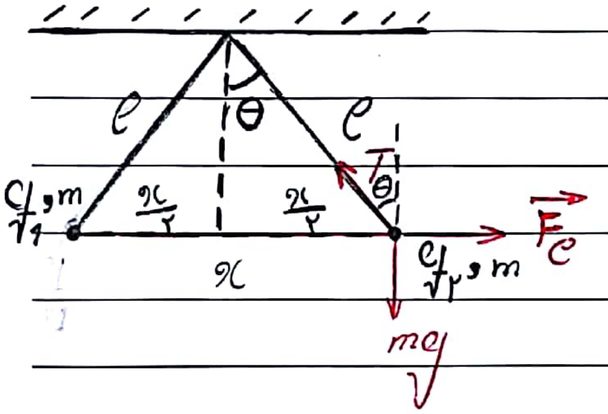
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overbrace{q_1 q_2}^{2C^2}}{(2^2+1^2)}(-2\hat{x} - \hat{y}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\overbrace{q_1 q_3}^{-1C^2}}{(1^2+1^2)}(-\hat{x} + \hat{y}) \rightarrow \vec{f}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)\hat{x} + \left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right)\hat{y}\right] = \frac{1}{4\times 3.14\,\varepsilon_0}\left[-\frac{3}{10}\hat{x} + \frac{1}{10}\hat{y}\right]$$

$$= \frac{1}{12.56\,\varepsilon_0}\left[-0.3\hat{x} + 0.1\hat{y}\right]$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: ۲ گلوله مشابه و هم علامت و جرم به اندازه‌ی یکسان باردار شده‌اند.



$$T \begin{cases} T_x = T\sin\theta \\ T_y = T\cos\theta \end{cases}$$

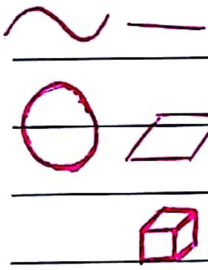
$$\sum \vec{F} = 0 \begin{cases} \sum \vec{F}_H = 0 & T\sin\theta = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \\ \sum \vec{F}_V = 0 & T\cos\theta = mg \end{cases}$$

$$\div \qquad tg\theta = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mg x^2}$$

$$\sin\theta = \frac{x/2}{l}$$

فرض کنید θ خیلی کوچک باشد: $\theta \approx \sin\theta \approx tg\theta \rightarrow \dfrac{\frac{x}{2}}{l} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mg x^2}$

$$\rightarrow x = \left(\frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}$$



توزیع بار الکتریکی ناشی از توزیع بارهای پیوسته:
۱- خطی
۲- سطحی
۳- حجمی

هرجایی که بار به صورت پیوسته باشد به چگالی نیاز داریم: λ , σ , ρ

- λ → چگالی خطی (C/m)
- σ → چگالی سطحی (C/m^2)
- ρ → چگالی حجمی (C/m^3)

در این مسائل جرم پیوسته را به تعداد بی‌نهایت نقطه تبدیل می‌کنیم تا بتوان از

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

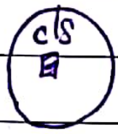
روابط کولن برای بار

المان گیری

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \rightarrow dq = \lambda dl$$

۱- خطی ها

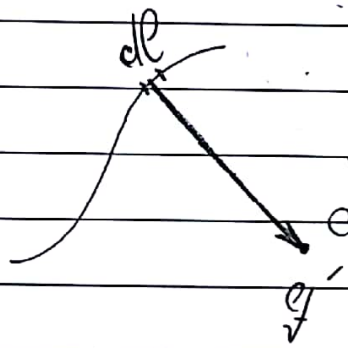
۲- سطحی ها



$$\delta = \frac{dq}{ds} \longrightarrow dq = \delta ds$$

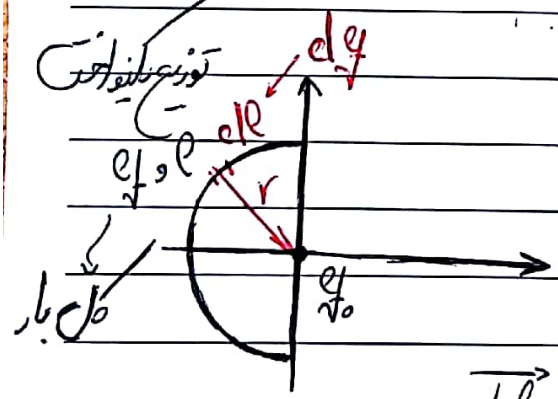
۳- حجمی ها

$$\rho = \frac{dq}{dv} \longrightarrow dq = \rho dv$$



$$\overrightarrow{df'} \longrightarrow \vec{F}_{q'} = \int \overrightarrow{dF_{q'}}$$

مثال:



$$\lambda = \frac{q}{l}$$

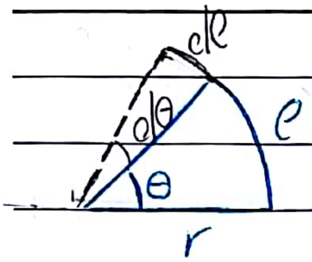
اگر λ ثابت نباشد و با توجه به موقعیت مکان تغییر کند dq نیز تغییر می‌کند

$$dq = \lambda dl$$

$$\vec{df} = \int \frac{dq \times q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r} \longrightarrow dq = \lambda dl$$

$$\frac{dq\, q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\vec{r}$$

Subject:
Year: Month: Day:

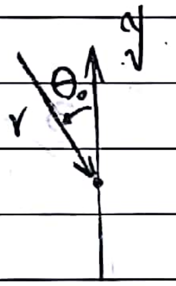


$\theta = \frac{\ell}{r}$

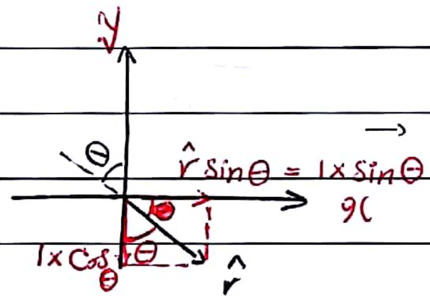
$d\theta = \frac{d\ell}{r}$

$$\vec{df} = \begin{cases} \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda r\, d\theta\, q_0}{r^2}\,\hat r \\ \int \;''\; \cdot \;''\; \frac{1}{r^3}\,\vec r \end{cases}$$

$$\vec f_{q_0} = \int \vec{df} = \begin{cases} \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda r\, d\theta\, q_0}{r^2}\,\hat r \\ \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda r\, d\theta\, q_0\, \vec r}{r^3} \end{cases} = \begin{cases} I: \frac{\lambda q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{d\theta\, \hat r}{r} \\ II: \;''\; \int \frac{d\theta\, \vec r}{r^2} \end{cases}$$



I :

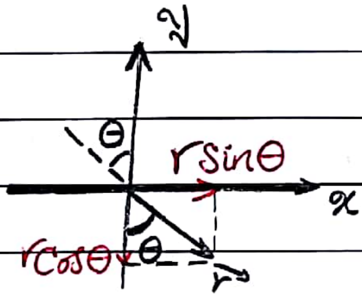


$\longrightarrow I = \frac{\lambda q_0}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{d\theta}{r} \left(\sin\theta\, \hat x - \cos\theta\, \hat y\right)$

$$= \frac{\lambda q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \int_0^{\pi} \left(\sin\theta\, \hat x - \cos\theta\, \hat y\right) d\theta = \frac{+(\lambda)\, q_0}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$\lambda = \frac{q}{\ell}$, $r = \frac{\ell}{\pi}$

II :



$$\frac{\lambda q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \int_0^{\pi} \left(r \sin\theta\, \hat x - r\cos\theta\, \hat y\right) d\theta$$

$$= \frac{\lambda q_0 r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \int_0^{\pi} \left(\sin\theta\, \hat x - \cos\theta\, \hat y\right) d\theta = \frac{\lambda q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \times 2 = \frac{+\lambda q_0}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

AIDIN

$\longrightarrow I = II$ برهی

Subject:
Year: Month: Day:

میدان الکتریکی

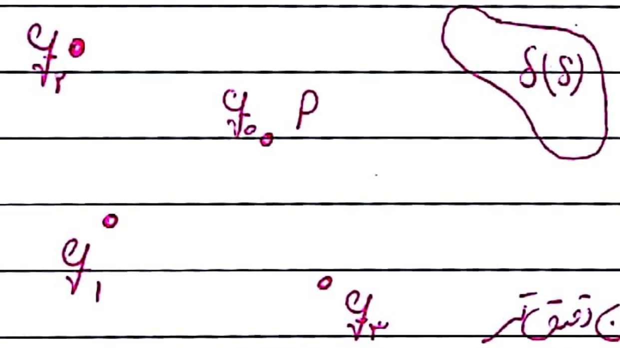
دو دیدگاه برای نیروی بین ۲ بار الکتریکی:
- کنش از دور: بار ↔ بار
- خاصیت میدانی: بار ↔ میدان ↔ بار

دیدگاه اول: اگر q_1 به سرعت در اطراف q_2 جابجا شود، q_2 بدون هیچ وقفه‌ی زمانی تغییر مکان را حس می‌کند.

دیدگاه دوم: « « به سمت q_2 شتاب بگیرد، q_2 با گذشت زمان تغییر را حس می‌کند.

$t = r/c$

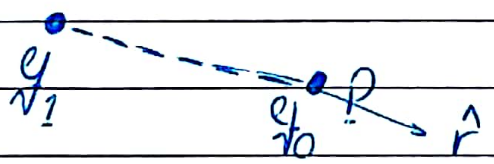
تعریف کمّی میدان:



$$\vec E = \vec F / q_0 \rightarrow (q_0 \vec E = \vec F)$$

بیان دقیق‌تر: $\lim_{q_0 \to 0} \vec F / q_0 = \vec E$

۱- میدان حاصل از یک بار نقطه‌ای:



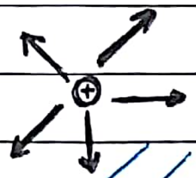
$$\vec F = \frac{\vec F_{10}}{q_0} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_0}{r^2}\hat r}{q_0}$$

→ به طور کلی: $\vec E_{\text{نقطه‌ای}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat r$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

جهت میدان برای بارهای مثبت به سمت خارج بار است.

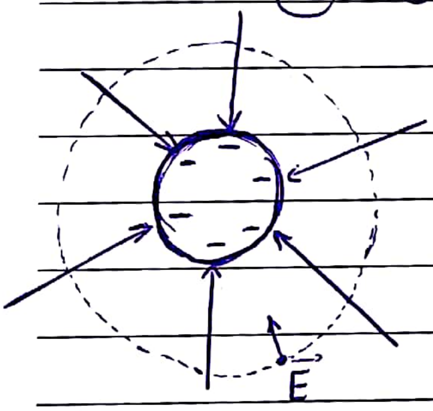


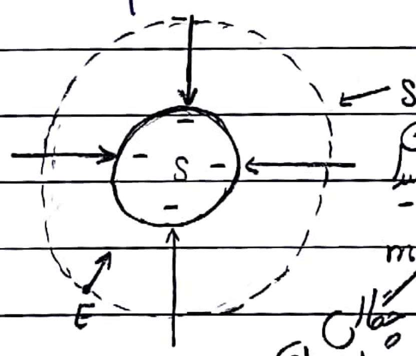
خطوط میدان (فارادی): ابزاری کیفی برای درک اندازه و جهت میدان الکتریکی

دو اصل: ① مماس بر هر خط نیرو و هم جهت با آن راستا و جهت میدان بدست می‌آید.

② تعداد خطوط نیرو بر واحد سطح با بزرگی E متناسب است.

تمرین: میدانی به صورت زیر داریم. شدت میدان چه ارتباطی با شعاع دارد؟





تعداد خطوط میدان

$m = \dfrac{N}{A} = \dfrac{N}{4\pi r^2}$ کره

چگالی خطوط میدان

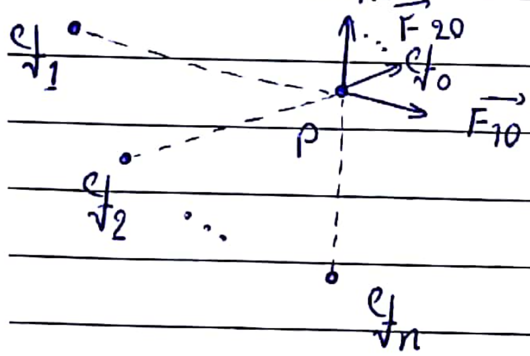
N ثابت است

پس $\vec{E} \propto m \propto \dfrac{1}{r^2}$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

۲- میدان ناشی از چندبار نقطه‌ای گسسته :



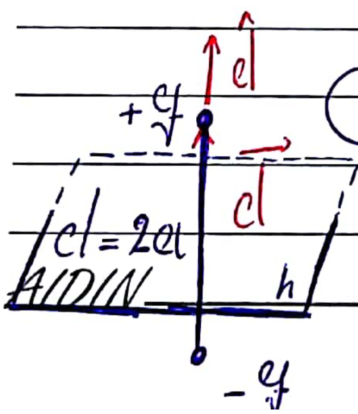
$$\vec{f}_0 = \vec{f}_{10} + \vec{f}_{20} + \dots + \vec{f}_{n0}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}_0}{q_0} = \frac{\vec{f}_{10} + \vec{f}_{20} + \dots + \vec{f}_{n0}}{q_0}$$

$$\longrightarrow \vec{E} = \underbrace{\frac{\vec{f}_{10}}{q_0}}_{\vec{E}_1} + \underbrace{\frac{\vec{f}_{20}}{q_0}}_{\vec{E}_2} + \dots + \underbrace{\frac{\vec{f}_{n0}}{q_0}}_{\vec{E}_n} \longrightarrow$$

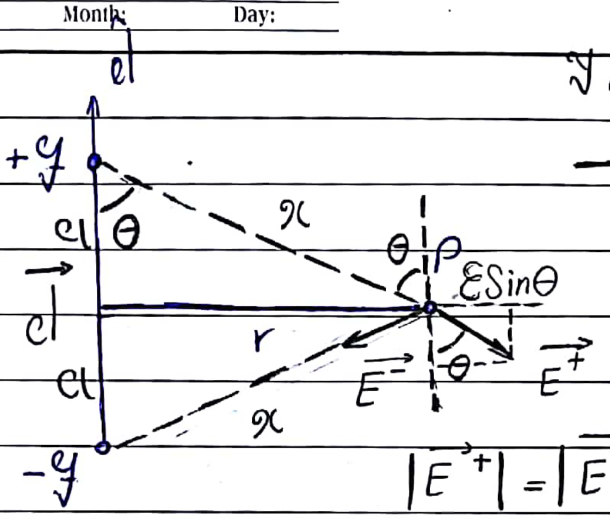
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\hat{r}_1 + \dots + \frac{q_n}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}\hat{r}_n$$

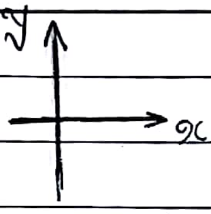
مثال: میدان ناشی از یک دوقطبی الکتریکی :



تعریف گشتاور دوقطبی الکتریکی: $\vec{P} = \underbrace{2a}_{l} \cdot q \cdot \hat{l} = q \cdot \vec{l}$

Subject:
Year: Month: Day:





$$\vec{E^+}\begin{cases} \vec{E^+_x} = \mathcal{E}\sin\theta \\ \vec{E^+_y} = -\mathcal{E}\cos\theta \end{cases}$$

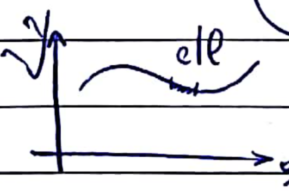
$$|\vec{E^+}| = |\vec{E^-}| = \mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(+q)}{x^2}$$

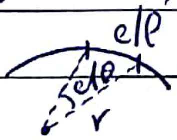
$$\vec{E} = \vec{E^+} + \vec{E^-} = [\cancel{\mathcal{E}\sin\theta\,\hat{x}} - \mathcal{E}\cos\theta\,\hat{y}] + [\cancel{-\mathcal{E}\sin\theta\,\hat{x}} - \mathcal{E}\cos\theta\,\hat{y}]$$

$$= -2\mathcal{E}\cos\theta\,\hat{y} = -2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{+q}{(a^2+r^2)}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\right)\hat{y} =$$

$$\frac{-2aq\,\hat{y}}{4\pi\varepsilon_0\underbrace{(a^2+r^2)^{3/2}}_{\text{if } r\gg a\ \to\ r^3}}$$

۳- میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار پیوسته ← خطی / سطحی / حجمی





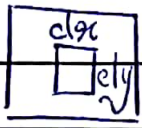
$dl = r\,d\theta$

$dl = dx$

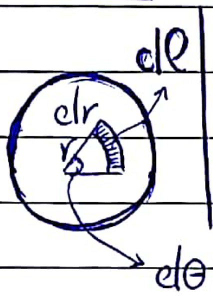
خطی: $dq = \lambda\,dl$

Subject:
Year: Month: Day:

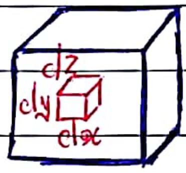
سطحی: $dq = \sigma ds$ ، ds : $ds = dx\,dy$



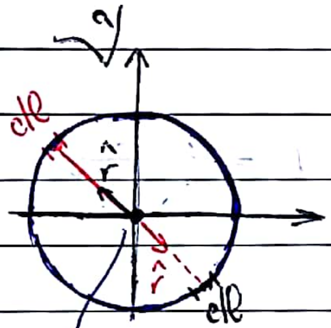
$ds, dr, \underbrace{dl}_{r d\theta}$



حجمی: $dv = \rho\, dx\,dy\,dz$



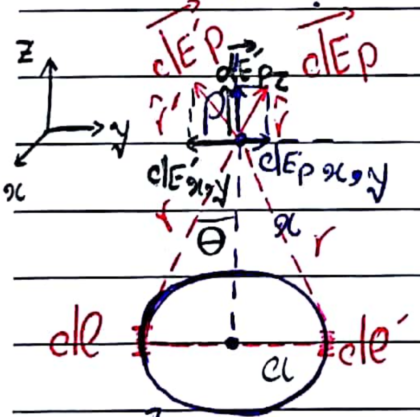
مثال: $\lambda\,(\frac{c}{m})$ ثابت



چون چگالی خطی ثابت است و بردارهای یک هم اندازه اما در خلاف جهت هستند قطعاً E در مبدأ مختصات صفر است.

$\vec{E} = ?$

مثال ۲: بردارهای r حول نقطه p یک مخروط ایجاد می کنند



$dq = \lambda dl \longrightarrow d\vec{E}_p = \underbrace{\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}_{\varepsilon}\hat{r}$

$d\vec{E}_p$ و $d\vec{E}_p$ را حول محور z و xy تجزیه می کنیم.

$(c/m) \Leftarrow \lambda$ ثابت

$$d\vec{E}'_p = \underbrace{\frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}_{\varepsilon}\hat{r}'$$

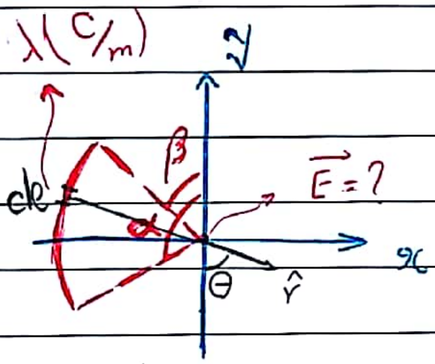
Subject:
Year: Month: Day:

$$\vec{dE_p} = \begin{cases} \mathcal{E}\cos\theta\ \hat{z} \\ \mathcal{E}\sin\theta\,(\hat{R}) \end{cases} \qquad \vec{dE'_p} = \begin{cases} \mathcal{E}\cos\theta\ \hat{z} \\ \mathcal{E}\sin\theta\,(-\hat{R}) \end{cases}$$

$$\vec{dE_p} + \vec{dE'_p} = ۲\,\mathcal{E}\cos\theta\ \hat{z} \longrightarrow \vec{E_p} = \int \vec{dE_z} = \int \mathcal{E}\cos\theta\ \hat{z} =$$

$$\frac{\hat{z}\,\lambda\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_0 r^۲}\underbrace{\int dl}_{2\pi a} = \hat{z}\,\lambda\, 2\pi a \frac{x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}$$

مثال ۳:



$$dq = \lambda\, dl \qquad \vec{dE} = \frac{\lambda\, dl}{۴\pi\varepsilon_0 R^۲}\hat{r}$$

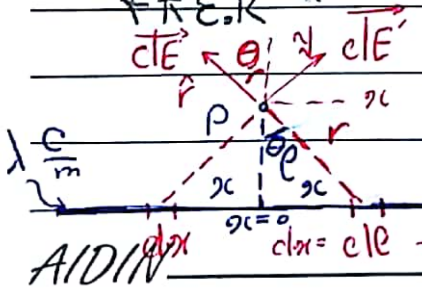
$$\hat{r} \begin{cases} \hat{r}_x = 1\times\sin\theta\ \hat{x} \\ \hat{r}_y = 1\times\cos\theta\ \hat{y} \end{cases}$$

$$\vec{E_T} = \int \vec{dE} = \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_0 R^۲}\int(\sin\theta\ \hat{x} - \cos\theta\ \hat{y})\underbrace{dl}_{R\,d\theta} =$$

$$\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_0 R}\int_\beta^\alpha (\sin\theta\ \hat{x} - \cos\theta\ \hat{y})\,d\theta = \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_0 R}\left[-\cos\theta\Big|_\beta^\alpha \hat{x} - \sin\theta\Big|_\beta^\alpha \hat{y}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_0 R}\left(-\cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha-\beta)\ \hat{y}\right)$$

توزیع بار خطی



...

$dx = dl \rightsquigarrow dq = \lambda\, dl$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

$$\vec{dE} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2}}_{E} \hat{r} = E\cos\theta\,\hat{y} - E\sin\theta\,\hat{x}$$

با حضور $\vec{dE}$ ، مؤلفه‌ی $\hat{x}$ میدان خنثی و صفر می‌شود

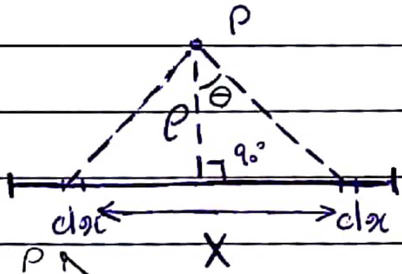
$$\vec{E} = \int \vec{dE}_y = \int E\cos\theta\,\hat{y} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta\,\hat{y}$$

$$r^2 = x^2 + l^2 \qquad x = l\,tg\theta \rightarrow dx = l(1+tg^2\theta)d\theta$$

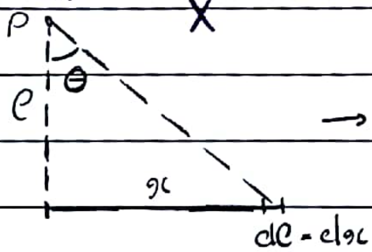
$$\hookrightarrow r^2 = l^2 tg^2\theta + l^2 = l^2(1+tg^2\theta)$$

$$\rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\hat{y}\int\frac{dx}{r^2}\cos\theta = \frac{\lambda\hat{y}}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{l(1+tg^2\theta)\,d\theta}{l^2(1+tg^2\theta)}$$

$$= \frac{\lambda\hat{y}}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 l}\hat{y}$$



$$\vec{E} = \frac{\lambda\hat{y}}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_{-tg^{-1}\left(\frac{X}{2L}\right)}^{tg^{-1}\left(\frac{X}{2L}\right)}\cos\theta\,d\theta$$



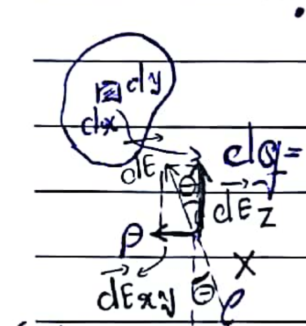
$$\rightarrow \vec{E} = \int\vec{dE} = \int dE_x\hat{x} + dE_y\hat{y} =$$

$$\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta\,\hat{y} + \text{——}\sin\theta\,\hat{x}$$

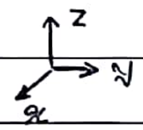
که بازه‌ی انتگرال از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند

Subject:
Year: Month: Day:

توزیع بار سطحی:

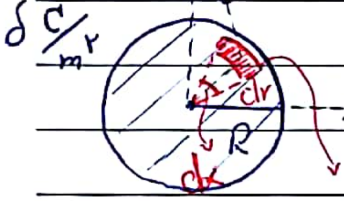


$dq = \sigma\, ds \to \vec{dE} = ?$



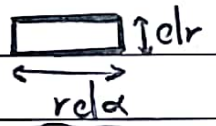
میدان ناشی از دیسک باردار:

$\sigma\ \frac{C}{m^2}$



فرض σ ثابت — استفاده از مختصات قطبی

شبه مستطیل در نظر گرفته می‌شود. $\to$



$\to ds = r\,d\alpha\,dr$

$$\to dq = \sigma\, r\,dr\,d\alpha \to \vec{dE} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\sigma r\,d\alpha\,dr}{x^2}}_{\mathcal{E}}\hat{x}$$

بر اساس تقارن $\vec{dE_{xy}}$ها خنثی می‌شوند.

$$\vec{dE} = \mathcal{E}\cos\theta\,\hat z \to \vec E = \hat z\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma r\,dr\,d\alpha}{x^2}\cos\theta$$

$x^2 = \rho^2 + r^2 \qquad r = \rho\, tg\theta \qquad d\theta$

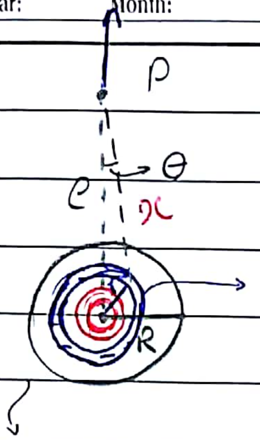
α و r تغییر می‌کنند.

همواره تغییر متغیر طول به زاویه مسائل را آسان‌تر می‌کند.

$$\to \vec E = \hat z\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma(\rho\, tg\theta)(\rho(1+tg^2\theta))d\theta\, d\alpha}{\rho^2(1+tg^2\theta)}\cdot\cos\theta = \hat z\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int\sin\theta\, d\theta\, d\alpha = \hat z \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{tg^{-1}(\frac{R}{\rho})}\sin\theta\, d\theta\cdot\int_0^{2\pi}d\alpha$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+R^2}}\right)$$

Subject: $\vec{E}$
Year: Month: Day:



روش دوم حل این مسئله: شعاع حلقه r_0 آن

$$\vec{E}_{حلقه} = \hat{E}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \, l}{(l^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{(l^2+r^2)}}_{\frac{1}{x^2}} \cdot \underbrace{\frac{l}{(l^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}}_{\cos\theta} \Rightarrow$$

$$\delta = \delta_0 \left(\frac{C}{m^2}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{x^2} \cos\theta \longrightarrow$$

اگر δ ثابت یا وابسته به r بود می توان از این رابطه بهره برد.

$$\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{x^2} \cdot \cos\theta \qquad dq = \delta ds$$

پس $dq = \delta_0 \, 2\pi r dr$

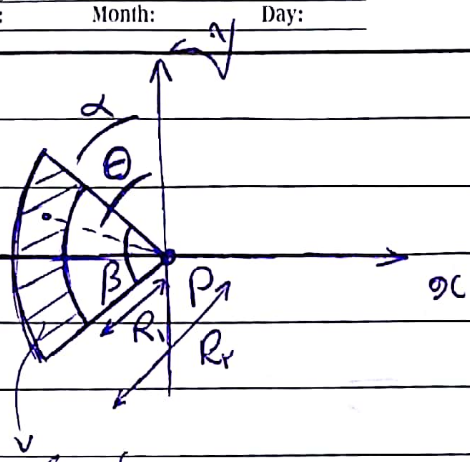
ds :  $\longrightarrow$ $2\pi r$ ، dr $\longrightarrow ds = 2\pi r dr$

بسیار نازک پس مساحتش تقریبا مشابه مساحت مستطیل است

$$\longrightarrow \vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{x^2} \cos\theta = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\delta_0 \cdot 2\pi r dr}{x^2} \cos\theta$$

Subject:
Year: Month: Day:

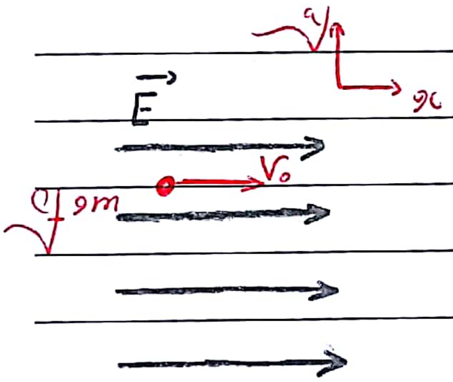
مثال : $\vec{E}_P = ?$



$\delta = \delta_0 \sin\theta$

r

بار الکتریکی نقطه‌ای در میدان الکتریکی یکنواخت :

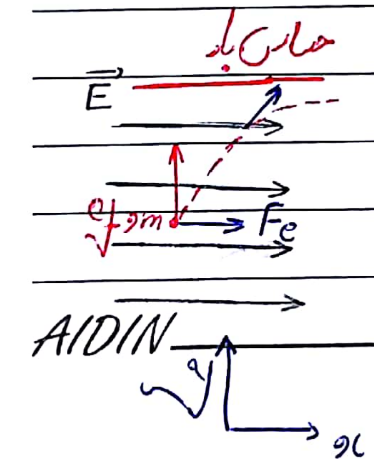


$$\vec{F}_{elec} = q\vec{E} \longrightarrow a = \frac{q\vec{E}}{m}$$

میدان یکنواخت پس a ثابت ⇐

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

سرعت اولیه در جهت راستای x

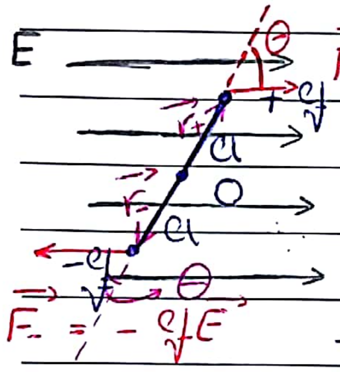


$$\vec{F}_m = q\vec{E} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\cdot\frac{q\vec{E}}{m}t^2 \\ y = v_0 t \end{cases} \longrightarrow x = \frac{1}{2}\frac{q\vec{E}}{m}\cdot\left(\frac{y}{v_0}\right)^2$$

Subject:
Year: Month: Day:

دوقطبی الکتریکی در میدان:

$\vec F_+ + \vec F_- = 0$. اگر O ثابت نشده باشد جسم می‌چرخد حول O.



گشتاور حول O

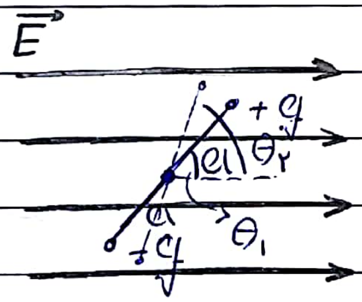
$$\vec\tau_+ = \underbrace{a\hat{l}}_{\vec r_+} \times \underbrace{q\vec E}_{\vec F_+} = aqE\sin\theta \otimes$$

$$\vec\tau_- = \vec r_- \times \vec F_- = aqE\sin\theta \otimes$$

$$\vec p = 2aq\hat{l} = q\vec l \qquad \vec\tau = \vec\tau_+ + \vec\tau_- = \underbrace{2aq}_{|\vec p|}\underbrace{E}_{|\vec E|}\sin\theta \otimes$$

$$= \vec p \times \vec E$$

انرژی ناشی از چرخش دوقطبی در میدان الکتریکی:



$$dx \longrightarrow dw = F\,dx$$

$$d\theta \longrightarrow dw = -\tau\, d\theta \qquad \tau = 2aqE\sin\theta$$

$$\Delta U\Big|_{\theta_1\to\theta_2} = -W = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} dw = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} -\tau\, d\theta$$

$$\Delta U\Big|_{\theta_1\to\theta_2} = 2aqE(-\cos\theta)\Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = 2aq\vec E(-\cos\theta_2 + \cos\theta_1)$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} \qquad = \underbrace{2aq}_{|\vec p|}\underbrace{\vec E}_{|\vec E|}(-\cos\theta_2) = -\vec p\cdot\vec E$$

زاویه بین P و E

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

از پتانسیل با تابع نیروی الکتریکی — انتگرال

$$\Delta U_{\theta_1 \to \theta_2} = -\vec{P}\cdot\vec{E}\Big|_{\theta_2} - \left(-\vec{P}\cdot\vec{E}\Big|_{\theta_1}\right)$$

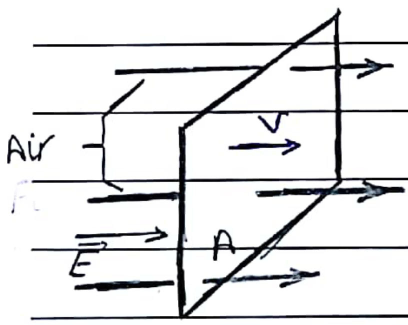
$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_2}$ $\int_{\theta_1}^{\theta_2}$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_1}$

فصل ۲۳ هالیدی قانون گاوس

قانون کولن ⟵⟶ قانون گاوس ⟶ یکی از ۴ قانون ماکسول

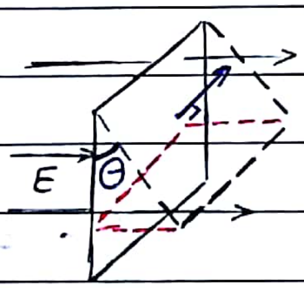
شار الکتریکی

شار به طور کلی برای پدیده‌های انتقال به صورت کمیت برداری و به صورت عمود بر سطح تعریف



$\phi = AE$ میدان الکتریکی یکنواخت عمود بر سطح می‌شود

" " " مایل با سطح



$\phi = AE\cos\theta = \vec{A}\cdot\vec{E}$

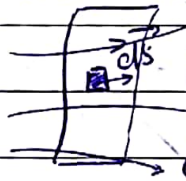
تعریف بردار سطح $\vec{A}$: که عمود بر سطح و اندازه‌اش برابر با مساحت $A\cos\theta$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

سطح دلخواه و میدان الکتریکی غیریکنواخت:

$$d\phi = E\,dA \longrightarrow \phi = \int E\,dA$$



$$\phi_E = \int \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

ds ← بردار سطح

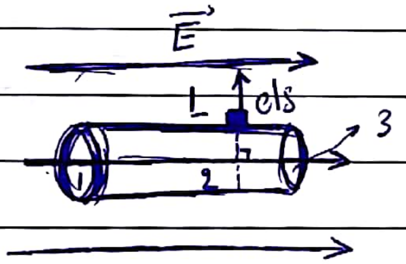
قانون گاوس:

$$\oint_E \Big| = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Q ← کل بار موجود داخل سطح

خروجی دخالت

شار اگر مثبت شد یعنی برآیند خطوط میدان وارد بر حجم به سمت خارج حجم است. همواره ds را به سمت خارج حجم فرض می‌کنیم.



مثال: باید ds را برای ۳ سطح در نظر بگیریم

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \Phi_{E_{①}} + \Phi_{E_{②}} + \Phi_{E_{③}}$$

۱:

ds

$$\longrightarrow \Phi_{E_1} = \oint_S |\vec{E}||ds|\cos 180 = \int_{①} -E\,ds =$$

$$-E\int_{①} ds = -E(\pi R^2) \quad Ⓐ$$

$$\Phi_{E_2} = \oint_{②} |E||ds|\underbrace{}_{\cos(\frac{\pi}{2})} = 0 \quad Ⓒ$$

$$\Phi_{E_3} = +E(\pi R^2) \quad Ⓑ$$

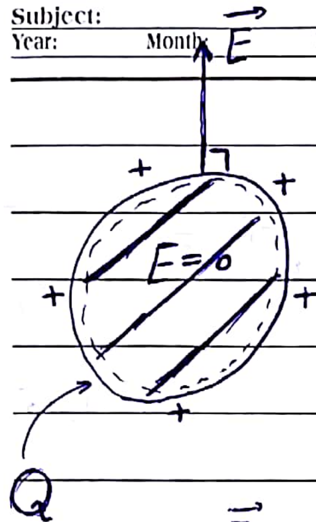
$$\xrightarrow{A, B, C} \Phi_E = A + B + C = 0$$

ds

Subject:
Year: Month: Day:

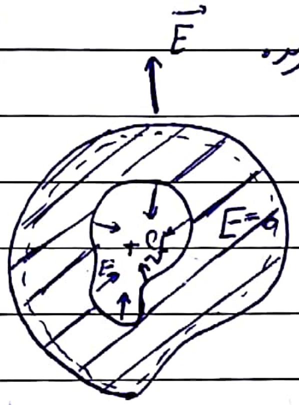
قانون گاوس در جسم رسانا با حجم V:

بارهای الکتریکی قابلیت جابجایی داشته باشند.



$\to \oint_E = 0 \to Q = 0$

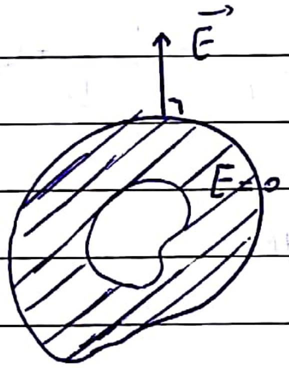
اگر باری به مرکز جسمی تزریق شود آنقدر جابجا می‌شود تا بار که به تعادل الکتریکی برسد.



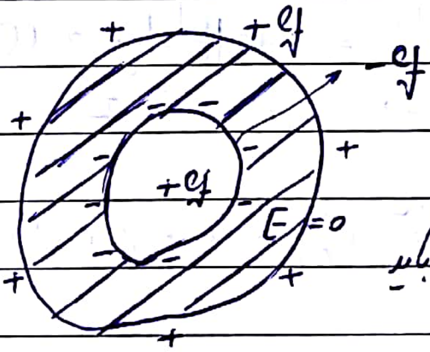
$\oint_E = 0 \to Q = 0 \to$ حالتی که یک قسمت (A)

از جسم رسانا خالی باشد.

(B) حال اگر در قسمت تخلیه شده‌ی جسم $+q$ بگذاریم



شکل برای حالت A:



شکل برای حالت B:

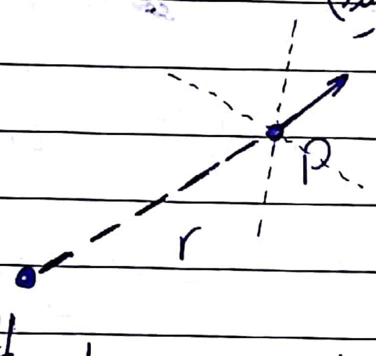
فلز ابتدا خنثی بوده پس چون $-q$ روی سطح خالی شده قرار گرفت باید

بار $+q$ طبق گاوس باشد که جسم همچنان خنثی باشد.

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

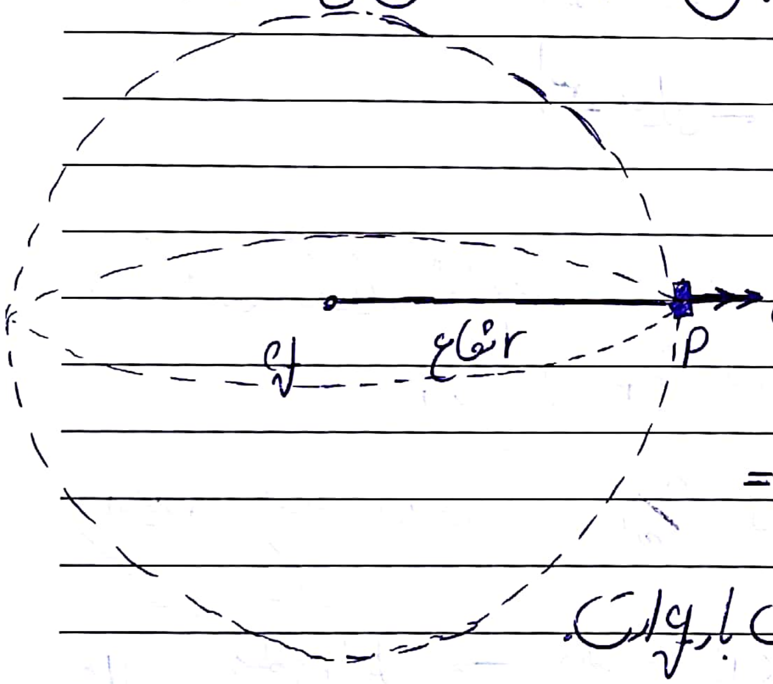
استفاده از قانون گاوس در جهت اثبات قانون کولن (برای میدان)



$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

قانون گاوس از روابط انتگرالی پیروی می‌کند پس فقط اندازه به ما می‌دهد و هیچ اطلاعاتی از جهت نمی‌دهد.

برای اینکه E ثابت وار انتگرال خارج شود باید حجمی انتخاب شود که E روی سطح آن ثابت باشد در سطح کره این خاصیت را دارد



$$\Phi_E = \oint_S E(r)\, ds \cos 0$$

$$= E(r)\oint_S ds = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow$$

این شرایط مشابه وضعیت تقارن به مرکزیت بار q است.

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \longrightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

برای استفاده از گاوس باید ابتدا ۲ چیز را مشخص کنیم: (۱) جهت میدان (۲) تابعیت فضایی میدان.

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

داده را همراه نوع جسم مورد نظر در نظر بگیرید. (در ابتدا)

کاربردهای قانون گاوس:

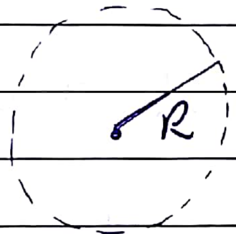
در مسائلی که تقارن زیادی دارند به کمک ما می آید. (توزیع بارها)

انواع تقارن های توزیع بار:

۱- کروی ← بار نقطه ای

۲- استوانه ای ← یک میله ی (خط) باردار (با شروط خاص) بی نهایت طویل با توزیع بار یکنواخت

۳- صفحه ای ← صفحه ی بی نهایت با توزیع بار یکنواخت



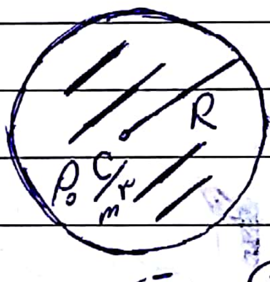
تقارن کروی: در یک کره به شعاع R:

حجم: $\rho = \rho_0 \ C/m^3$ یا $\rho(r)$

اگر $\rho(r)$ ها باشند نمی توان تقارن کروی فرض کرد

پوسته: $\sigma = \sigma_0 \ C/m^2$

مثال: $\vec{E} = ?$



به ۲ قسمت فضا را تقسیم می کنیم برای راحت تر شدن محاسبات

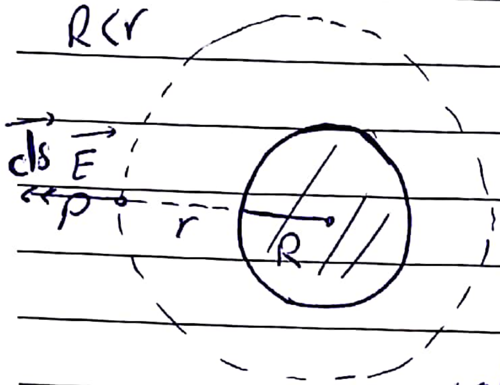
حالت اول $0 < r < R$ ← سطح به داخل کره ی اولیه

حالت دوم $R < r$ ← سطح به خارج کره ی اولیه

Subject:
Year: Month: Day:

$\vec{E} = E(r)\hat{r}$ $\quad \Phi_E = \oint_S \vec{E}(r) \cdot \vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ → کل بار درون

$R < r$



$E(r) \oint_S ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ → جسم

$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

اگر کل بار Q در مرکز کره ی اولیه متمرکز شود در نقطه مبدا همین مقدار خواهد بود.

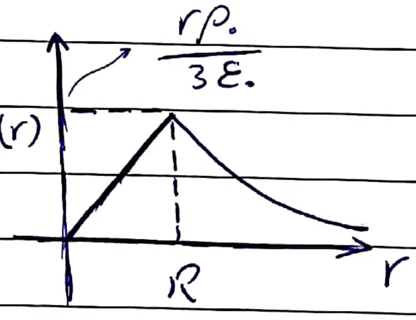
$\rho(r)$ و $\rho_0 \ C/m^3$

$0 < r < R$

$\rightarrow \Phi_E = \oint_S \vec{E}(r) \cdot \vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

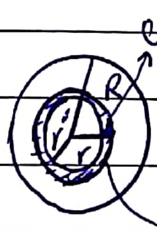
$\rightarrow E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$

$$E(r) = \begin{cases} r < R: & \frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0} \\ r > R: & \frac{1}{3}\frac{R^3\rho_0}{\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$



$\rho(r) = \rho_0 r^2$

مثال: چون ρ برحسب r است باید المان بار را در نظر بگیریم



$r' < r < R$

$dv = 4\pi r'^2 dr'$ (مساحت، ارتفاع)

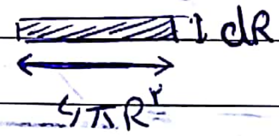
AIDIN $\quad dq = \rho(r) dv = \rho_0 r'^2 \cdot 4\pi r'^2 dr'$

Subject:
Year: Month: Day:

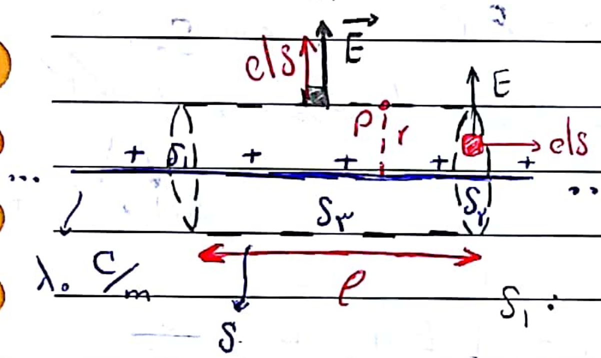
اگر ρ تابعی از r بود باید المان به صورت حلقه در نظر گرفت

$$dv = \underbrace{ds}_{4\pi R^2} \cdot \text{ارتفاع} \rightarrow dR$$

R دلخواه (با توجه به مسئله)



تقارن استوانه‌ای:



$\lambda_0 \; C/m$

$\vec{E} = ?$

$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$

$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

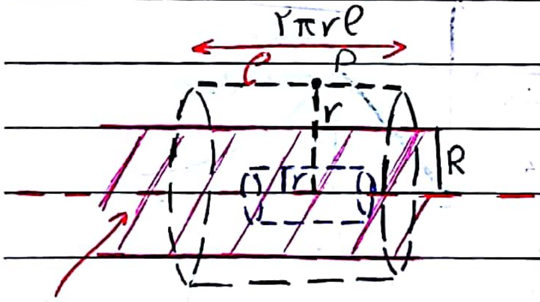
$S_1:$

$\rightarrow \Phi_{E_1} = \oint_{S_1} \vec{E}\cdot\vec{ds} = 0$

مشابه S_2 → $\Phi_{E_2} = 0$

$$\Phi_{E_3} = \oint_{S_3} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \oint_{\text{سطح پیرامونی}} \vec{E}\cdot\vec{ds} = \int_{\text{سطح پیرامونی}} E(r)\,ds \longrightarrow$$

$$\Phi_{E_3} = E(r)\underbrace{\int ds}_{2\pi r \ell} \rightarrow E(r)\cdot 2\pi r\ell = \frac{Q}{\varepsilon_0} \xrightarrow{Q=\lambda_0 \ell} E(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\hat{r}$$



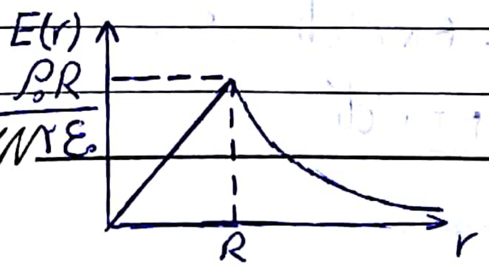
استوانه با طول بی‌نهایت:

$$E(r)\cdot 2\pi r\ell = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad Q = \pi R^2 \ell \rho_0$$

$$\rightarrow E(r) = \frac{\frac{\pi R^2 \ell \rho_0}{\varepsilon_0}}{2\pi r \ell} \quad : r > R$$

$\rho(r) = \rho_0 \; C/m^3$ ← تقارن استوانه‌ای

$$r < R \rightarrow E(r)\cdot 2\pi r\ell = \frac{\pi r^2 \ell \rho_0}{\varepsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}$$



AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

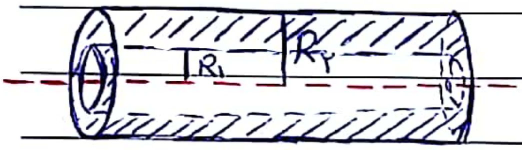
$E(r)=0$

$r<R_1 \quad \underbrace{E(r)}_{=0}\, \underbrace{2\pi r\ell}_{\neq 0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ ، تقارن

$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$

(۱) $R_1<r<R_2$

(۲) $r>R_2$

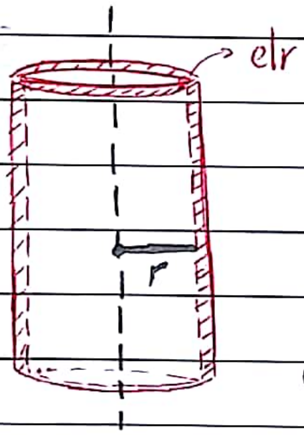


r فاصله تا محور استوانه

$\rho = \rho_0(r) = \rho_0 r^2 \;\; C/m^3$

زمانی می‌توان گفت جسم با تقارن بی‌میدان (میدان آن صفر) است که سطح متقارن باشد ← ممکن است سطح بدون بار اما دارای میدان باشد.

(۱) : $R_1<r<R_2 \longrightarrow E(r)\cdot 2\pi r\ell \longrightarrow E(r)\,2\pi r\ell = \frac{Q}{\varepsilon_0}$



$dQ = (\rho_0 r^2)\,dv \qquad dv = S\,dr'$

$S = 2\pi r'\ell$

$Q = \int dQ = \int(\rho_0 r^2)\,dv = \int_{R_1}^{r} \rho_0 r^2 \cdot 2\pi r'\ell\, dr$

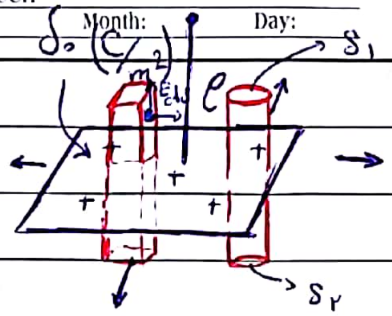
$= 2\pi\rho_0\ell \int_{R_1}^{r} r'^3\, dr = \frac{\pi\ell\rho_0}{2}\,(r-R_1)^4$

(۲) : $r>R_2$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

تقارن صفحه‌ای



$$\vec{E} = E(z)\hat{z}$$

در این حالت شار عبوری از سطوح جانبی صفر است.

$$\Phi_{S_1, S_2} = \oint_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{ds} + \oint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

سطح بالایی — سطح پایینی

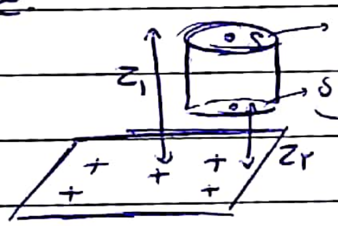
در بالای صفحه با بار مثبت میدان به سمت بالا و در زیر آن میدان به سمت پایین است.

S_1: $\theta = 0°$ $\quad$ S_2: $\theta = 0°$

$$= 2E(z)\oint_{\text{سطح بالایی}} ds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad Q = \delta_0 S \longrightarrow E(z) = \frac{\delta_0}{2\varepsilon_0}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\delta_0}{2\varepsilon_0}(\hat{z}) & ; z > 0 \\ \dfrac{\delta_0}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}) & ; z < 0 \end{cases}$$

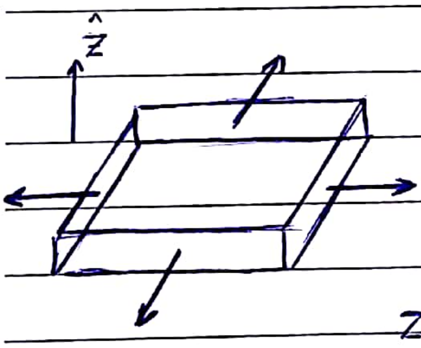
نکته:



$$E(z_1)S + E(z_2)S = \underbrace{(E(z_1) + E(z_2))}_{=0}\underbrace{S}_{\neq 0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

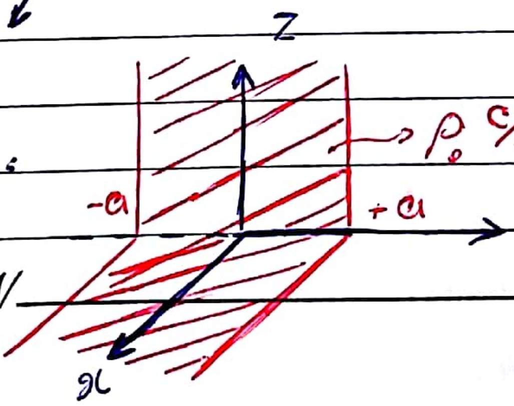
$$\longrightarrow E(z_1) = -E(z_2)$$

مثال:



$\rho(\hat{z})$: شرط تقارن صفحه‌ای بودن — ثابت در جهت $\hat{z}$ محدود صفحه

مثال:



$\rho\ C/m^3$ یا $\rho(y)$ $\longrightarrow \vec{E} = E(y)\hat{y}$

ملخص به حول محور yها محدود است.

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

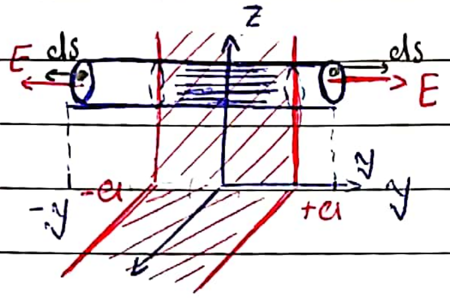
گرفتن سطح گوسی

بهتر است سطح گوسی هم متقارن باشد

Ⓐ $|y|<a$ یا $-a<y<+a$

Ⓑ $|y|>a$ یا $y<-a \,,\, y>+a$

B :



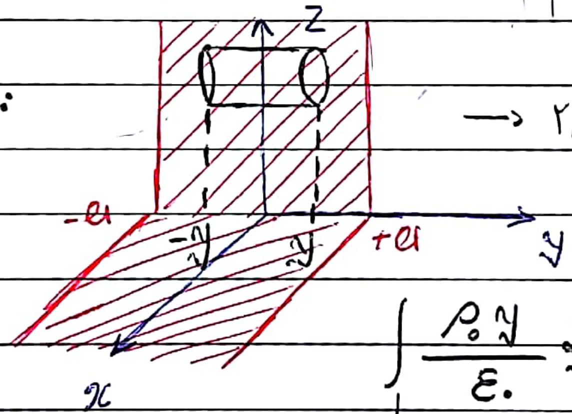
$\longrightarrow 2E(y)S = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, $Q \longrightarrow S \cdot 2a\rho_0$

$\phi = 0$ جانبی استوانه

$\longrightarrow E(y) = \dfrac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}$

$$\longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\,\hat{y} & y>a \\ \dfrac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}(-\hat{y}) & y<a \end{cases}$$

A :

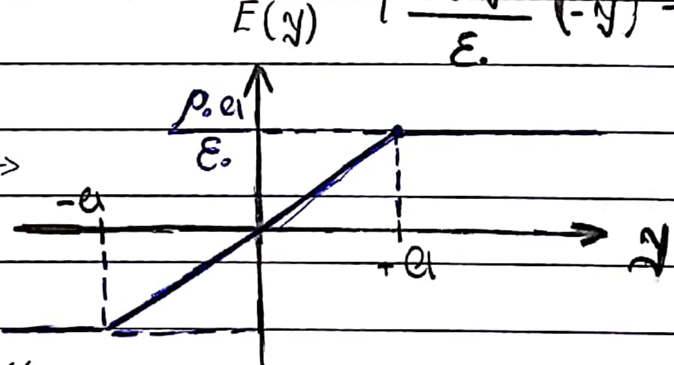


$\longrightarrow 2E(y)S = S(2y)\rho_0 \longrightarrow$

$E(y) = \dfrac{\rho_0 y}{\varepsilon_0} \longrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_0 y}{\varepsilon_0}\,\hat{y} & 0<y<a \\ \dfrac{\rho_0 y}{\varepsilon_0}(-\hat{y}) & -a<y<0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$



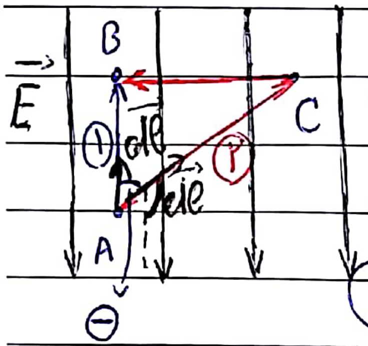
AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

پتانسیل الکتریکی

نیروی الکتروستاتیکی پایستار ← پایستار ← انرژی پتانسیل ← پتانسیل الکتریکی

مثال: آیا نیروی الکتروستاتیکی پایستار است؟



$d \quad W_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_A^B -\vec{F}_{elec}\cdot d\vec{l}$ مسیر ۱:

کاری که ما انجام می‌دهیم

$$= \int_A^B -\vec{E}q\cdot d\vec{l} = q\int_A^B -\vec{E}\cdot d\vec{l} \underset{\theta=\pi}{=} q\int_A^B E\cdot dl = qE\int_A^B dl$$

$$= qEd$$

مسیر ۲:

$$W_{ACB} = \int_A^C \underbrace{\vec{F}}_{-qE}\cdot d\vec{l} + \int_C^B \underbrace{\vec{F}}_{-qE}\cdot d\vec{l} = -q\int_A^C \vec{E}\cdot d\vec{l} \; - \underbrace{q\int_C^B \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{\theta=90^\circ=\frac{\pi}{2}}$$

$$= -q\int_A^C E\,dl\,\underbrace{\cos(\pi-\theta)}_{-\cos\theta} = qE\cos\theta\underbrace{\int_A^C dl}_{l} \overset{d=l\cos\theta}{=} qEd$$

$$U_{AB} = W_{AB} = \int_A^B -\vec{F}_{elec}\cdot d\vec{l} = -q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی $V_{BA} = \frac{U_{AB}}{q} = \frac{W_{AB}}{q} = \frac{-q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}}{q} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$

AIDIN

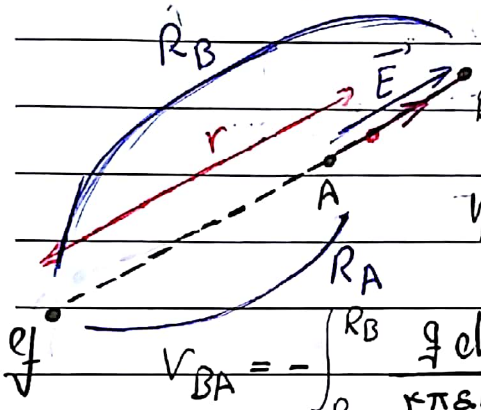
$$\longrightarrow \begin{cases} V = -\int E\cdot dl \\ \vec{E} = -\underbrace{\nabla}_{\text{گرادیان}} V \end{cases}$$

Subject:
Year: Month: Day:

پتانسیل الکتریکی نقطه‌ی A = اختلاف پتانسیل الکتریکی A نسبت به بی‌نهایت $= -\int_{\infty}^{A} \vec{E}\cdot d\vec{l} = V_A = V_{AB\to\infty}$

$$\vec{F}_{elec} = \vec{E}\,q$$

$$U_{AB} = q\int_{A}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l} = q\,V_{AB} \xrightarrow{\text{پس}} U_{AB} = q\,V_{AB}$$



۱- پتانسیل ناشی از یک بار نقطه‌ای:

$$V_{BA} = -\int_{A}^{B} \vec{E}\cdot d\vec{l} \underset{\theta=0}{=} -\int_{A}^{B} E\,dl \;,\; dr \Rightarrow \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

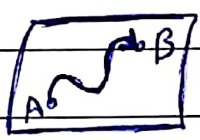
$$V_{BA} = -\int_{R_A}^{R_B} \frac{q\,dr}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right)$$

اسکالر

$$V_B = V_{BA\to\infty} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{R_B} \longrightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

معنا: اگر از بی‌نهایت تا فاصله‌ی r از بار q حرکت کنیم، اختلاف پتانسیل برابر این مقدار است.

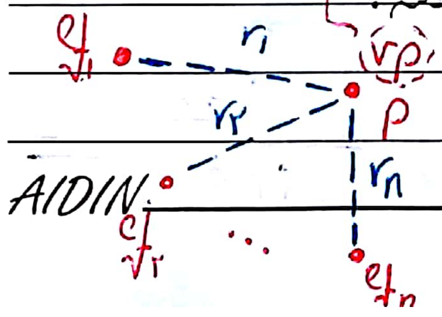
سطوح هم پتانسیل: سطحی است که همه نقاط آن سطح دارای پتانسیل یکسان هستند. ← خطوط میدان عمود است



$$W_{AB} = V_{BA}\cdot q = \underbrace{(V_B - V_A)}_{0}\,q = 0 \qquad V_B = V_A$$

نسبت به بی‌نهایت

۲- پتانسیل ناشی از مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای الکتریکی گسسته:



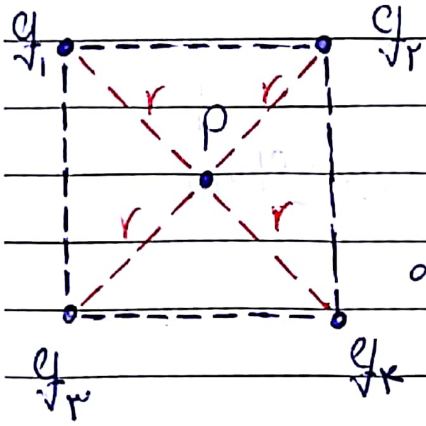
$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}_t\cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}_1\cdot d\vec{l} - \dots - \int_{\infty}^{P} \vec{E}_n\cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

Subject:
Year: Month: Day:

$$\rightarrow V_P = \sum_{i=1}^{n} V_i(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

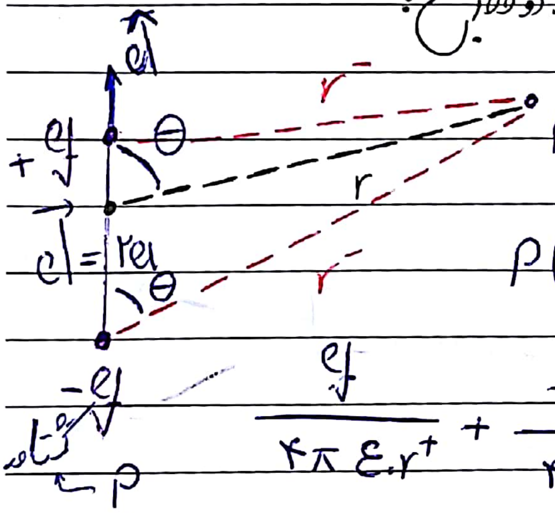
مثال:



$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(q_1 + q_2 + q_3 + q_4\right)$$

نسبت بدهم

۳- پتانسیل ناشی از دوقطبی الکتریکی در نقاط خیلی دور از دوقطبی:



تقریب $r^+ = r^-$

$$P(r,\theta) \Rightarrow V_P = V_+ + V_- =$$

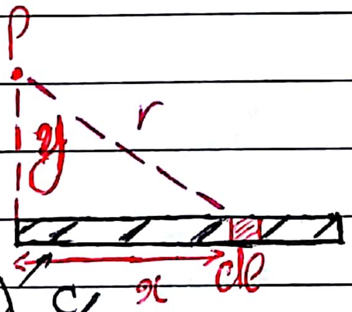
$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^+} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(r_-) - (r_+)}{r_+ r_-} =$$

$r_+ r_- \approx r^2$

$$\frac{q \cdot 2a\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهای پیوسته:

توزیع بار خطی:



$$dq = \lambda dl = \lambda dx \longrightarrow$$

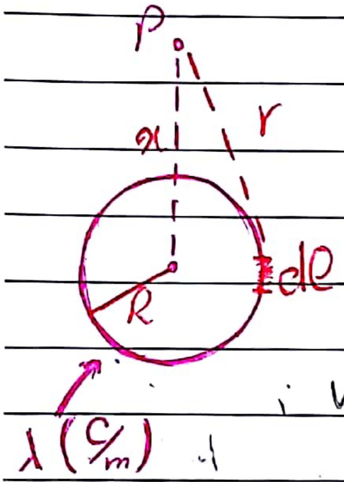
$$dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

$$V_P = \int dV = \int_0^{\ell} \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_0^{L}$$

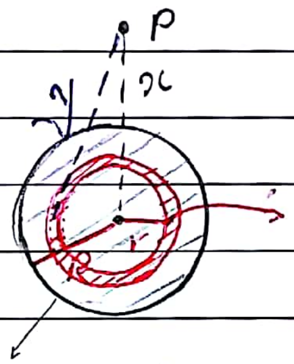
$$\Rightarrow V_P = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{L+\sqrt{\ell^2+y^2}}{y}\right)$$



$dq = \lambda\, d\ell \rightarrow dV = \dfrac{\lambda\, d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r}$ ؛ طول کل حلقه $= 2\pi R$

$$V_P = \int dV = \int \frac{\lambda\, d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\underbrace{\int d\ell}_{\text{طول حلقه}} = \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q_{\text{کل بار}}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

پتانسیل ناشی از توزیع بار سطحی



$ds = 2\pi r\, dr$

$dq \longrightarrow dV = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 y}$, $dq \to \delta\, ds$

$\delta\ (C/m^2)\ !\ \delta(r)$ $\quad \dfrac{\delta\, 2\pi r\, dr}{4\pi\varepsilon_0 y} \longrightarrow V = \int dV = \int_0^R \dfrac{\delta\, 2\pi r\, dr}{4\pi\varepsilon_0 y}$

$$= \int_0^R \frac{\delta\, 2\pi r\, dr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+R^2} - x\right]$$

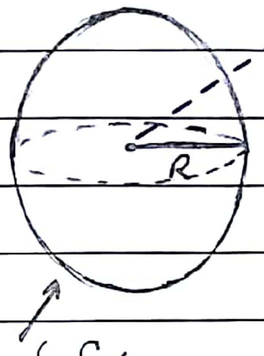
$\hookrightarrow r^2 + x^2 = u$ $\qquad x \gg R : V = \dfrac{\delta \pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 x}$

$2r\, dr = du$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

براساس تقارن و قانون گاوس می توان کره را همچون نقطه در نظر گرفت.



$$r>R: E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad q \longrightarrow 4\pi R^2 \delta$$

$$V_P = -\int_\infty^P E\cdot dl = -\int_\infty^P E(r)\,dr \Rightarrow$$

$\delta \; C/m^2$

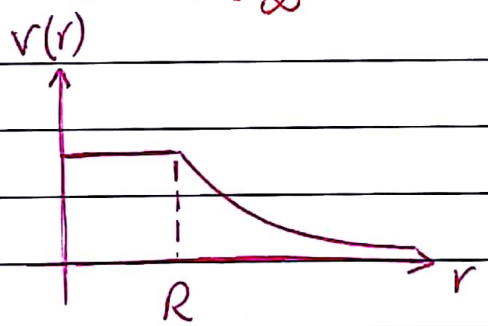
$$V_P = -\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_\infty^r =$$

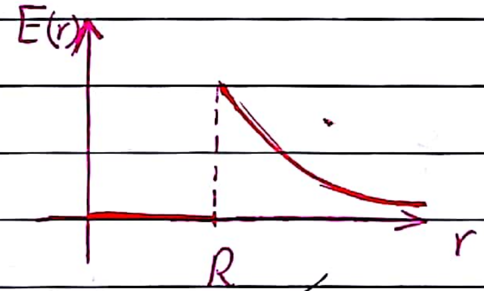
$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} : r>R \qquad q \rightarrow \delta 4\pi R^2$$

if: $r<R$ گاوس → $E=0$, $V=0$

پس در حالت کلی: $V_P = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_\infty^R E(r)\,dr - \int_R^r \overset{0}{\overbrace{E(r)}}\,dr$

$$\rightarrow V_P = -\int_\infty^R E(r)\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$





گاوس جایی مجاز است که تقارن فضایی داشته باشیم. ← حلقه چنین خاصیتی را ندارد.

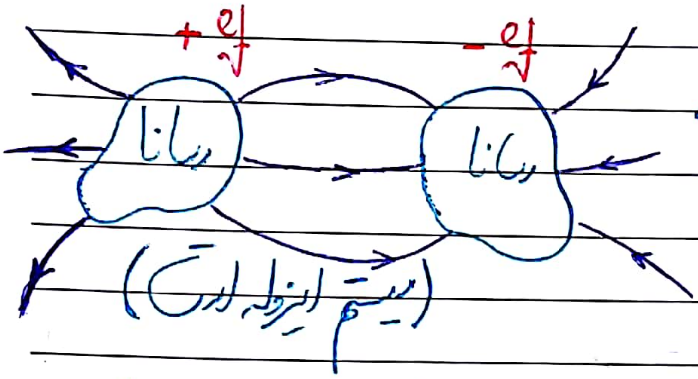
خازن ها و دی الکتریک:

← ذخیره سازی انرژی الکتریکی توسط جدایش بار الکتریکی

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

اختلاف پتانسیل باتری همواره ثابت است اما خازن ارتباط خطی با بار وارده بر خازن دارد.



خازن: تعریف کمی از طریق تصویر

ظرفیت $C = \frac{q}{V}$ نسبت به ∞

Capacity

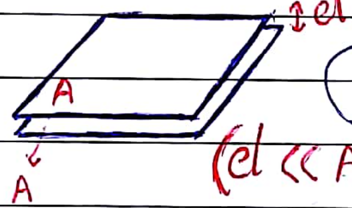
فاراد $\left(F = \frac{1C}{1V}\right)$

$1\mu F = 10^{-6} F$

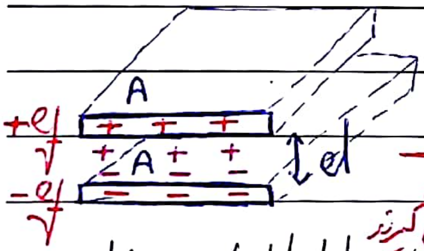
$1nF = 10^{-9} F$

$1pF = 10^{-12} F$

خازن تخت (صفحه‌ای)



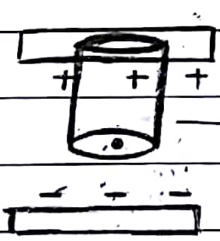
$(d \ll A)$



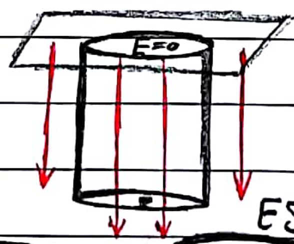
بارها روی پایین‌ترین نقطه‌ی سطح قرار می‌گیرند

$q \rightarrow E \rightarrow V$

به علت شرایط مسئله $(d \ll A)$ میدان ناشی از صفحات باردار با ابعاد بی‌نهایت



سطح گاوسی



$\frac{q}{A}$

δS

$$\Phi_E = \overbrace{\int E \cdot ds}^{0} + \overbrace{\int E \cdot ds}^{0} + \overbrace{\int E \cdot ds}^{ES} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow$$

روی سطح پیرامونی — روی سطح جانبی بالا — روی سطح جانبی پایین

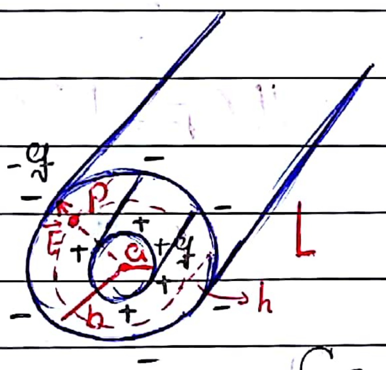
AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

$$E\,S' = \frac{q}{A\varepsilon_0}\,S' \longrightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \longrightarrow$$ ثابت ← میدان صفحه‌ی بی‌نهایت ثابت است

$$V = -\int_0^d -E\,dl = Ed = \frac{q}{\varepsilon_0 A}\,d \longrightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$ (ε_0 هوا)

۲- خازن استوانه‌ای (دو استوانه‌ی هم‌محور که یکی محصور در دیگری است).



استوانه درونی خالی یا توپر باشد تأثیری ندارد.

اگر استوانه‌ها ضخامت داشته باشند نیز تأثیری ندارد.

$$C = \frac{q}{V} \qquad (a, b \ll l) \qquad q \longrightarrow E \longrightarrow V$$

بدست آوردن میدان در نقطه‌ی P : P حالت استوانه‌ای به خودش گیرد (طول استوانه: h)

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{E}\cdot ds \qquad \delta = \frac{q}{2\pi a l} \qquad Q = \delta S \Rightarrow$$

سطح پیرامونی

$$Q = \frac{q}{2\pi a l}\cdot 2\pi a h = q\frac{h}{l}$$

$$E(r)\cdot 2\pi r h' = \frac{q h'}{l\varepsilon_0} \Longrightarrow E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l}$$

$$\longrightarrow V = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r}$$ بازه‌ی انتگرال از b به a است زیرا همواره پتانسیل از صفحه‌ی مثبت تا صفحه‌ی منفی تغییر می‌کند.

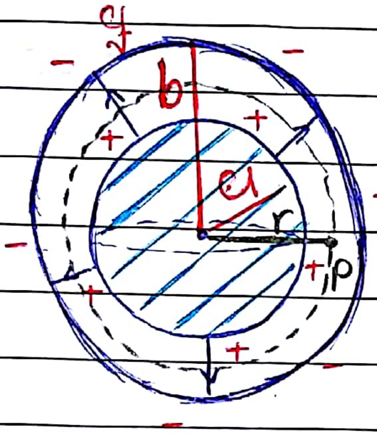
$$= -\int \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\cdot dr = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln r\Big|_b^a = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a} \longrightarrow$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \ell}{\ln \frac{b}{a}}$$

۳- خازن کروی:



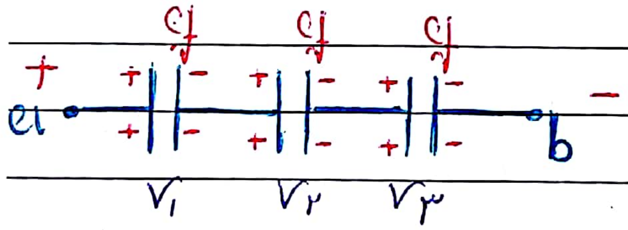
چون تقارن کروی است می‌توان همچون نقطه در نظر گرفت

$$\longrightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} \longrightarrow E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$V = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_b^a \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)_b^a = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \longrightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

توالی و توازی خازن‌ها:

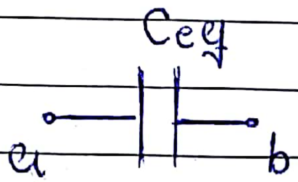


$$V_{ab} = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$$

$$\frac{q}{C_1} \quad \frac{q}{C_2} \quad \frac{q}{C_3} \quad \frac{q}{C_n}$$

$$\longrightarrow V_{ab} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}\right)$$

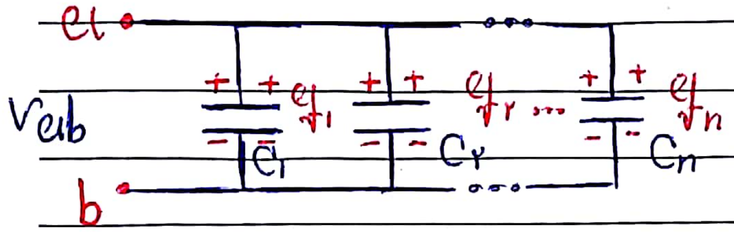
$$C_{eq} = \frac{q}{V_{ab}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}} \longrightarrow$$



AIDIN

$$\longrightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Subject:
Year: Month: Day:

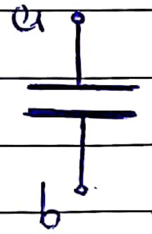


$Q = q_1 + q_2 + \dots + q_n$

$\downarrow$ C_1V $\quad$ C_2V $\quad$ C_nV

$= V\underbrace{(C_1 + C_2 + \dots + C_n)}_{C_{eq}} \longrightarrow C_{eq} = \dfrac{Q}{V_{ab}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

$\longrightarrow$



$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

انرژی پتانسیل الکتریکی :

$q_1 \longrightarrow$ بار دیگری نیست

جا به جایی q_1 از بی نهایت به این نقطه $\rightarrow E = 0 \longrightarrow W = 0 \longrightarrow V = 0$

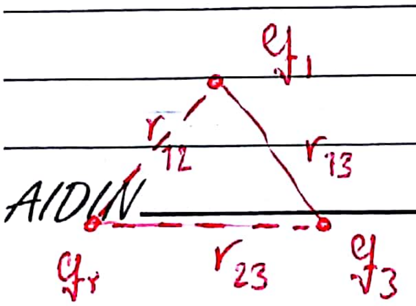
انرژی ذخیره شده

q_1 •------ r ------• q_2 $\quad V_{12} = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $\quad U = V_{12}\, q_2 = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = q_1 V_{21}$

q_A •———• B $\quad U = V_{BA} \cdot q$

V_{BA}

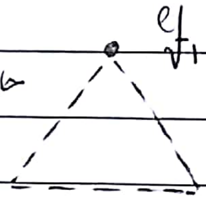
مثال :



AIDIN

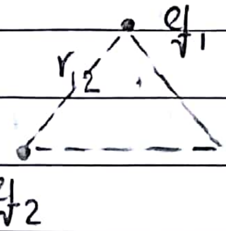
Subject:
Year: Month: Day:

حالت اول



$U = 0$

حالت دوم :

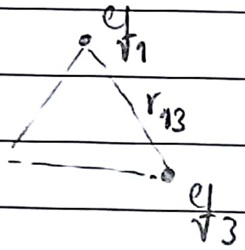


$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r_{12}}$$

$V_1 q_2$

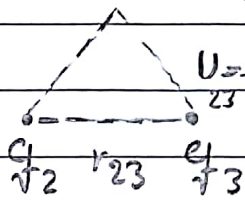
$V_2 q_1$

حالت سوم



$$U_{13} = \frac{q_1 q_3}{4\pi \varepsilon_0 r_{13}}$$

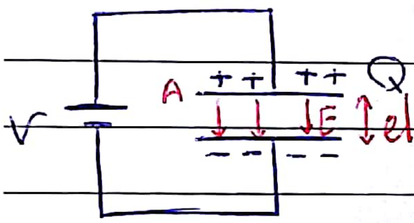
حالت چهارم



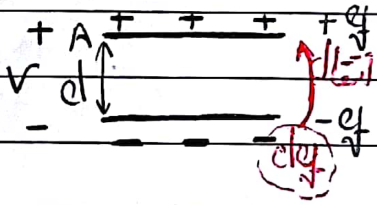
$$U_{23} = \frac{q_2 q_3}{4\pi \varepsilon_0 r_{23}}$$

$$\xrightarrow{\text{کل}} U = U_{12} + U_{23} + U_{13}$$

انباشت انرژی الکتریکی در خازن :



$q < Q$



$$dW = V\,dq$$

$$\to W = \int dW = \int V\,dq \Rightarrow$$

$$W = \int \frac{q\,dq}{C} \longrightarrow U = W = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{C}\,\frac{q^2}{2}\Big|_0^Q$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 \xrightarrow{V=Ed} U = \frac{1}{2}C(Ed)^2$$

چگالی انرژی در واحد حجم : $u = \dfrac{U}{V} = \dfrac{\frac{1}{2}C E^2 d^2}{V} \xrightarrow[V=Ad,\ C=\varepsilon_0 \frac{A}{d}]{\text{جایگذاری}} u = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

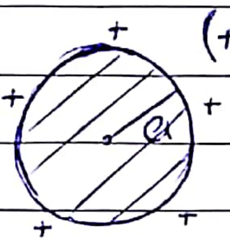
AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

$$U = \int_V u \, dv$$

u: چگالی انرژی — dv: المان حجم

مثال: یک خازن کروی منزوی داریم. بار الکتریکی $+q$ را روی آن قرار می‌دهیم. چگالی انرژی و انرژی کل ذخیره شده را بدست آورید.

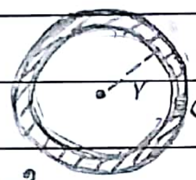


$(+q)$

$u = ?$ $\quad U = ?$

$$E \begin{cases} E = 0 \; : \; r < a \longrightarrow u = 0 \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \; : \; r > a \longrightarrow u = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \dfrac{1}{32\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q^2}{\pi^2 r^4} \end{cases}$$

$U = \int u \, dv$

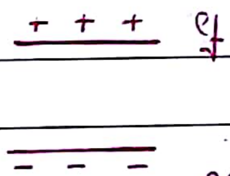


$dr \longrightarrow dv = 4\pi r^2 dr \longrightarrow$

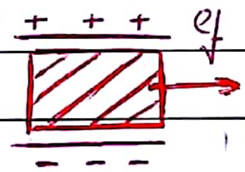
$$U = \int \frac{1}{32\varepsilon_0} \frac{q^2}{\pi^2 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\varepsilon_0 \pi} \int_a^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

راه دوم $\longrightarrow$ $U = +\dfrac{1}{2} \dfrac{q^2}{\underbrace{4\pi\varepsilon_0 a}_{C}}$ $\longrightarrow$ خازن کروی C

دی‌الکتریک ← عایق



قرار دادن دی‌الکتریک $\longrightarrow$

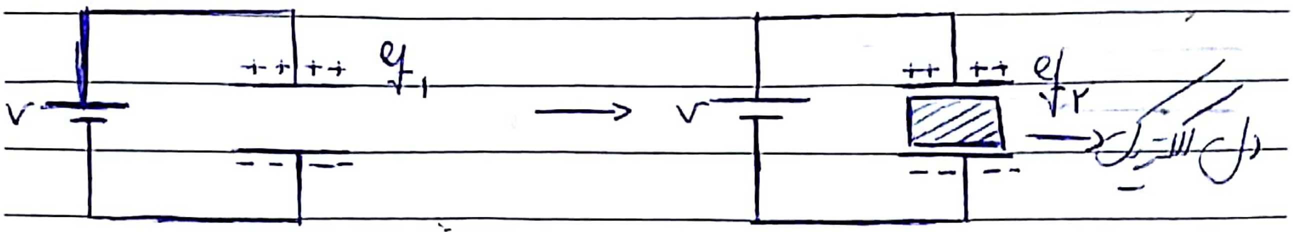


$\longrightarrow$ دی‌الکتریک

AIDIN $V_1 = \dfrac{q}{C_1}$ در خازن $\qquad V_2 < V_1 \qquad V_2 = \dfrac{q}{C_2} \longrightarrow C_2 > C_1$

$q_2 > q_1$

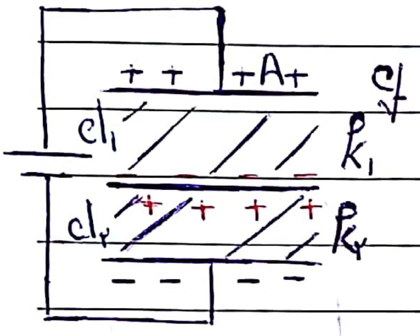
Subject:
Year: Month: Day:



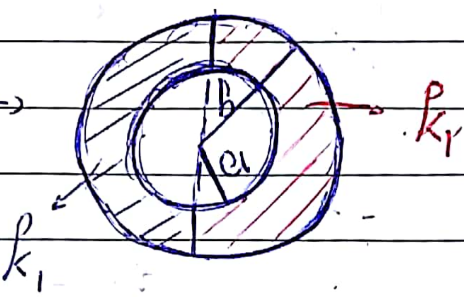
$q_2 > q_1$ → C_2V , C_1V

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{C_2}{C_1} = k$$ → تابع جنس دی الکتریک

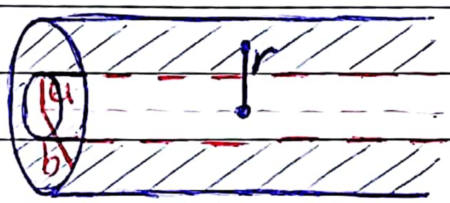
$$\rightarrow \boxed{C_k = C_0 k}$$



موازی →



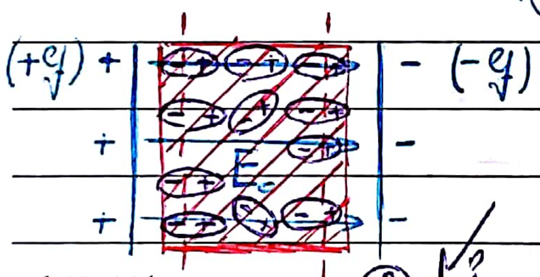
سری



$$k = k_0 r$$

→ سری

دی الکتریک ها از دیدگاه اتمی (میکروسکوپی)



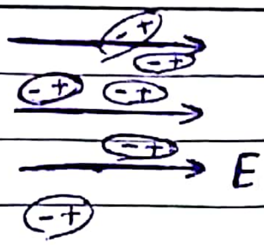
$$\frac{q}{\underbrace{\frac{\varepsilon_0 A}{d}}_{C_0}} = V_0 = E_0 d$$

AIDIN

A) نقطه

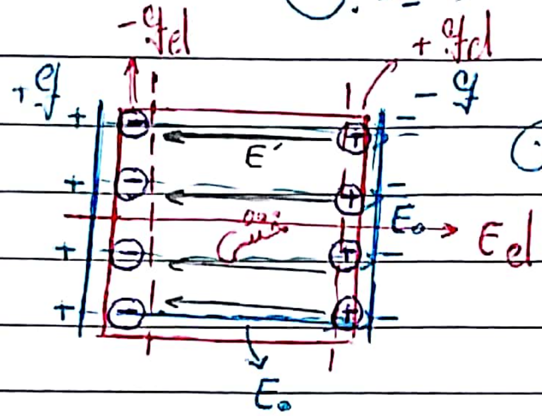
Subject:
Year: Month: Day:

دی الکتریک از دیدگاه اتمی | قطبی: آب
| غیرقطبی: شیشه



اعمال میدان

(B) تکمیل →



E_0 میدان بین ۲ صفحه خازن

$$E_{el} = E_0 - E'$$

$$\frac{E_{el}}{E_0} = \frac{V_{el}}{V_0} = \frac{1}{k}$$

قانون گاوس در دی الکتریک ها:

دی الکتریک کل

(I) دی الکتریک: $\varepsilon_0 \oint E\cdot ds = q = q - q_{el} = \frac{q}{k}$ بار آزاد

کل بار خنثی

(II) بدون دی الکتریک: $\varepsilon_0 \oint E_0\cdot ds = Q \to q$

$$\frac{I}{II}: \frac{q - q_{el}}{q} = \frac{E_{el}}{E_0} = \frac{1}{k} \to (q - q_{el}) = \frac{q}{k}$$

$$I: \varepsilon_0 \oint E\cdot ds = \frac{q}{k} \to q = \varepsilon_0 k \oint E\cdot ds$$

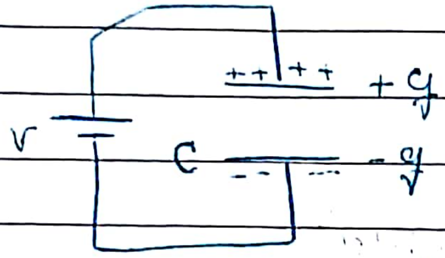
↳ کل بار آزاد روی سطح گاوسی

AIDIN

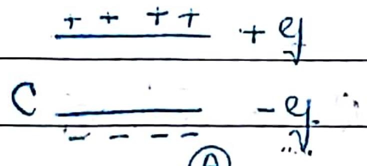
Subject:
Year: Month: Day:

q داشتن بار $\xrightarrow[\text{به}]{\text{رسیدن}}$ k , k داشتن $\xrightarrow[\text{به}]{\text{رسیدن}}$ q

مثال: تغییر انرژی خازن بین حالت های زیر را حساب کنید

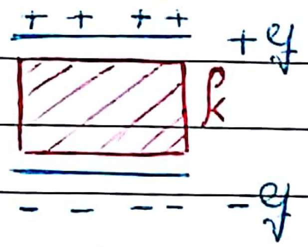


(۱) جدا کردن خازن از باتری



Ⓐ

$$U_A = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV_0^2$$



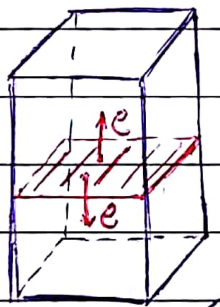
Ⓑ

$$U_B = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C'} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{KC}$$

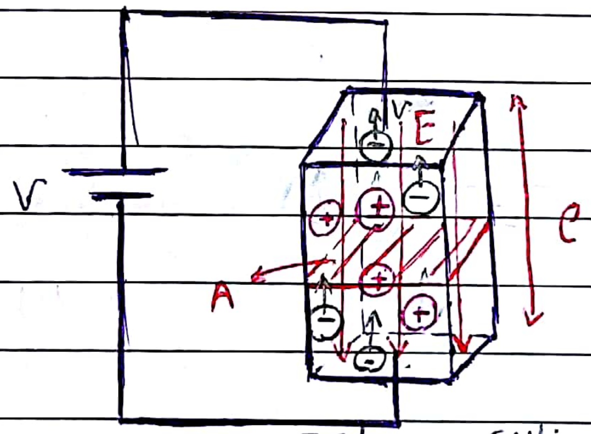
$$U_B = \frac{1}{k}U_C$$ ⟶ نیرویی که کاهش یافته صرف غلبه بر نیروی F داده و بردی الکتریک از اطراف دو صفحه خازن شده است.

فصل ۲۶:

جریان و مقاومت:



مقطع رسانا



$$V = \int E \cdot dl$$

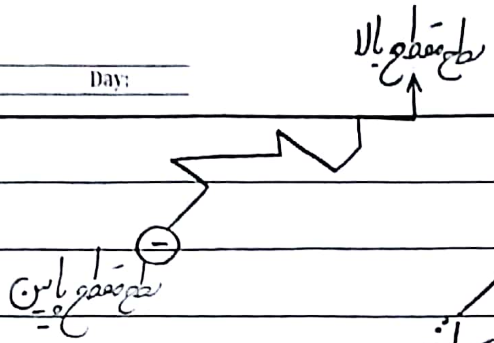
$$V = E\ell$$

حرکت الکترون ها در خلاف جهت میدان E

AIDIN

(ماکروسکوپیک) $i = \frac{q}{t} \longrightarrow \frac{dq}{dt} = i$

Subject:
Year: Month: Day:



مسیر حرکت الکترون درون رسانای با میدان E:

با دلیل این مسیر حرکت

نیرویی که بارهای مثبت (+) به بارهای منفی (−) وارد می کنند

مشخص می شود که الکترون‌ها با سرعت ثابتی موسوم به سرعت سوق به طرف مقطع بالا حرکت می کنند

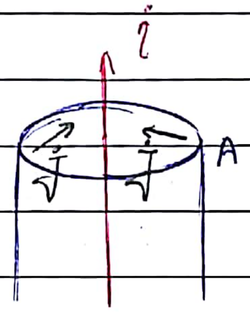
ایجاد مقاومت (R)

سرعت سوق : v_d

چگالی جریان $\vec{J} = \frac{i}{A}\hat{L}$

(میدان برداری)

عکس جهت حرکت الکترون‌ها در نقطه‌ای مورد نظر

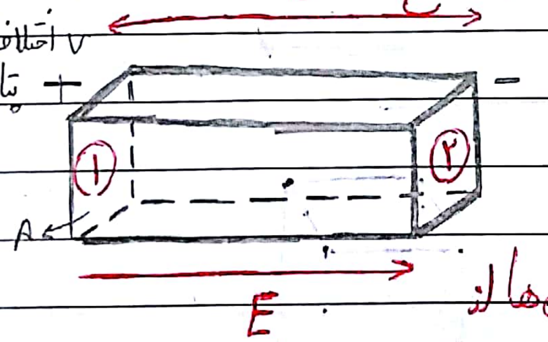


$$\vec{J} = \frac{di}{dA}\hat{L}$$

$$\text{کل} \quad i = \int_A \vec{J}\cdot d\vec{A}$$

بردار با اندازه dA و عمود بر سطح

اختلاف پتانسیل V



در واحد حجم

n: چگالی حامل‌های بار دارای قابلیت حرکت

v_d

$t = \frac{L}{v_d}$ مدت زمانی که حامل‌ها از ① به ② می روند

تعداد حامل‌های منتقل شده $= n\underbrace{V}_{\text{حجم مکعب}} = n(AL)$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

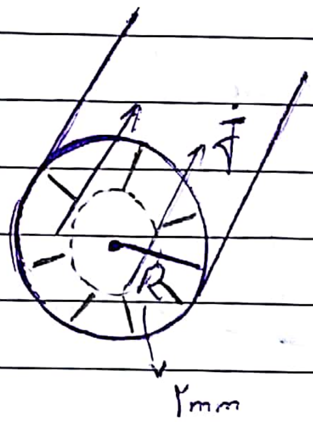
$$i = \frac{(n(Ad)\times e)}{t} = \frac{nAde}{\frac{d}{v_d}} = nAev_d$$

q

$\rightarrow \vec{J} = nev_d \rightarrow$ به جنس و سرعت میانگین وابسته است.

مثال: $R = 2mm$

$J_0 = 2\times10^5 \ A/m^2$



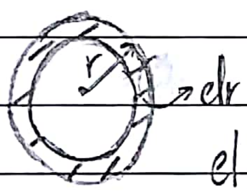
سیم به شکل استوانه

جریان عبوری بین فاصله شعاعی $r=\frac{R}{2}$ تا $r=R$ چقدر است؟ برای دو حالت

$$\begin{cases} J = J_0 \ A/m^2 \\ J = J_0 r^2 \ \frac{A}{m^2} \end{cases}$$

① حالت : $I = J_0 \times A = J_0 \times \left(\pi R^2 - \pi(\frac{R}{2})^2\right) = \frac{3}{4}\pi R^2 J_0$

② " : $I = \int \vec{J}\cdot \vec{ds} = \int J ds = \int_{\frac{R}{2}}^{R} J_0 r^2 (2\pi r) dr = 2\pi J_0 \left(\frac{r^4}{4}\right)\Big|_{\frac{R}{2}}^{R}$



$ds = 2\pi r dr$

مقاومت الکتریکی یک قطعه رسانا : $R = \frac{V}{I}$ $(\Omega = \frac{V}{A}) \rightarrow$ ماکروسکوپیک

چگالی مقاومت ← R برای یک نقطه : $\rho = \frac{\vec{E}}{\vec{J}}$

(مقاومت ویژه)

AIDIN

میکروسکوپیک

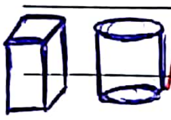
Subject:
Year: Month: Day:

ساده‌ترین حالت — مکعب مستطیل — تابع جنس

$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{V/\ell}{i/A} = \frac{V}{i}\cdot\frac{A}{\ell} = R\cdot\frac{A}{\ell} \rightarrow R=\rho\frac{\ell}{A}$$

مکعب مستطیل با میدان یکنواخت و قوی

محاسبه R برحسب ρ :



$R=\rho\frac{\ell}{A}$ ← ۱- یکنواخت (ρ ثابت) و شکل دارای سطح مقطع ثابت

I: تغییرات ρ در راستای جریان

۲- ρ ثابت نبوده و یا سطح مقطع شکل یکسان نداشته باشد

II: تغییرات ρ عمود بر جریان

۲- I : قطعه به قطعات با مساحت یکتا و طول dl به صورت متوالی تقسیم می‌شود.

المان های سری

$I: dR = \rho\frac{dl}{A} \rightarrow R=\int dR$ | ρ متغیر با فاصله عمود از خط dl

۲- II :

$II: dR = \rho\frac{\ell}{dA} \rightarrow \frac{1}{R}=\int\frac{1}{dR}$ — ρ روی این خط ثابت

المان های موازی