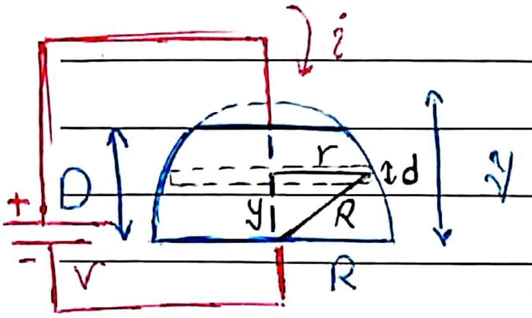
مثال: محاسبه مقاومت معادل:



$D < R$ $\rho = \rho_0 y$

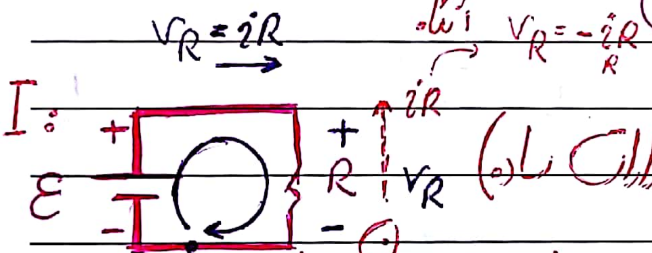
نکته: اگر بر حسب ارتفاع تغییر کند، المان ها را سری در نظر بگیرید

ها را کوچک گرفته تا انحنای لبه‌ی آن را بتوانیم در نظر نگیریم.

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \Rightarrow dR = \rho_0 y \frac{dy}{A} \quad A \rightarrow \pi r^2 \quad = \rho_0 y \frac{dy}{\pi (R^2 - y^2)} \longrightarrow$$

$$R = \int_0^D \frac{\rho_0 \, y dy}{\pi (R^2 - y^2)}$$

فصل 27: مدارهای الکتریکی



تجزیه و تحلیل مدارات ساده مقاومتی (حل مدارات ساده)

شرط: میدان ناشی بارهای الکتریکی مدار باشد

محاسبه مقادیر ولتاژ و جریان عناصر

مجموع جبری: قانون اول (قانون ولتاژ) (kvl):

اختلاف پتانسیل های موجود در هر مسیر بسته صفر است.

قانون دوم

قوانین کیرشهف

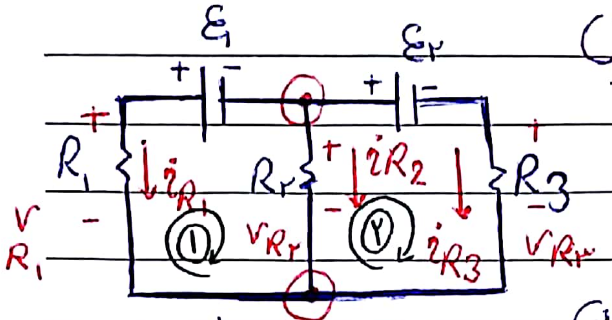
$$V_R = RI$$

$$V_{\text{باتری}} = \mathcal{E} \longrightarrow \text{مستقل از جریان}$$

$$I \text{ مدار}: \; +\mathcal{E} - V_R = 0 \longrightarrow \mathcal{E} - R i_R = 0 \longrightarrow \mathcal{E} = R i_R \longrightarrow i_R = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

← برای ساده‌ترین مدار

Subject:
Year: Month: Day:



این مدار با KVL و قوانین پتانسیل ها قابل حل نیست

(تعداد مجهول ها بیشتر از تعداد معادلات).

رفع مشکل: قانون دوم کیرشهف (KCL) ← بیان: مجموع جبری جریان های وارد بر

یک گره مساوی صفر است.

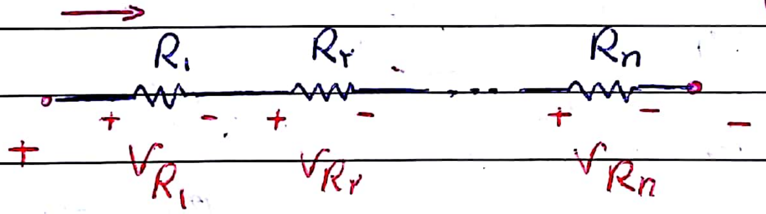
KCL: $i_{R_1}+i_{R_2}+i_{R_3}=0$

KVL$_1$: $+\overbrace{V_{R_1}}^{R_1 i_{R_1}}-\varepsilon_1-\overbrace{V_{R_2}}^{R_2 i_{R_2}}=0$

KVL$_2$: $+\underbrace{V_{R_2}}_{R_2 i_{R_2}}-\varepsilon_2-\underbrace{V_{R_3}}_{R_3 i_{R_3}}=0$

توالی و توازی مقاومت ها:

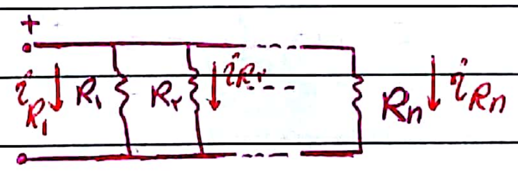
توالی



$V_{eq}=V_{R_1}+V_{R_2}+\dots+V_{R_n}=iR_1+iR_2+\dots+iR_n=$

$i(R_1+R_2+\dots+R_n)=iR_{eq}$ $\quad R=\frac{V}{i}$ $\quad V=Ri$

توازی



$i=i_{R_1}+i_{R_2}+\dots+i_{R_n}$

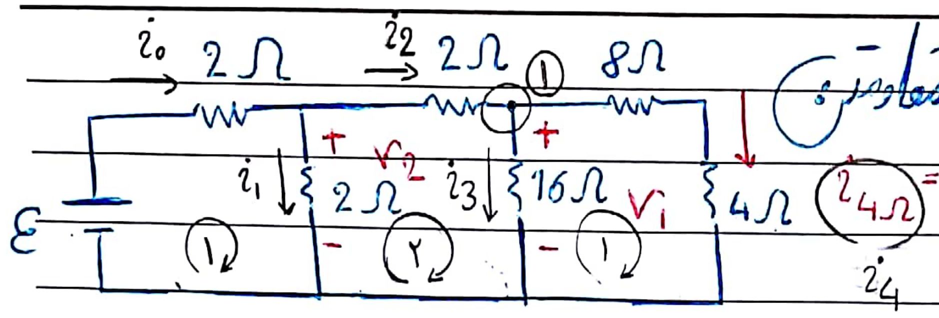
$=\frac{V}{R_1}+\frac{V}{R_2}+\dots+\frac{V}{R_n}=$

AIDIN

$V\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\dots+\frac{1}{R_n}\right)$

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: حل یک مدار مقاومتی



$i_{4\Omega} = 1.4\,A$

$\mathcal{E} = ?$

$V_1 = (8\Omega + 4\Omega) \cdot 1{,}4A = 16.8\,V$ $\qquad i_3 = \dfrac{16.8V}{16\Omega} = 1.05\,A$

$KCL_{①} : i_2 = i_4 + i_3 = 2{,}45\,A$

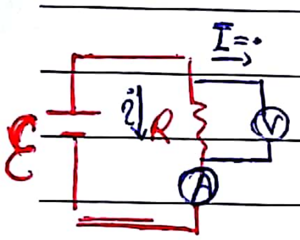
$KVL_{(۲)} \Rightarrow V_۲ = i_2 \times 2\Omega + V_1 = 2{,}45A \times 2\Omega + 16{,}8V = 21.7V$

$i_1 = \dfrac{V_۲}{2\Omega} = \dfrac{21.7}{2} = 10{,}85\,A \qquad KCL_{۲} \Rightarrow i_0 = i_1 + i_2 = 13.3\,A$

آمپرسنج ← سری در مدار بسته می‌شود ← افت ولتاژ دو سر = ۰

دلیل ↓

مقاومت آمپرسنج = ۰

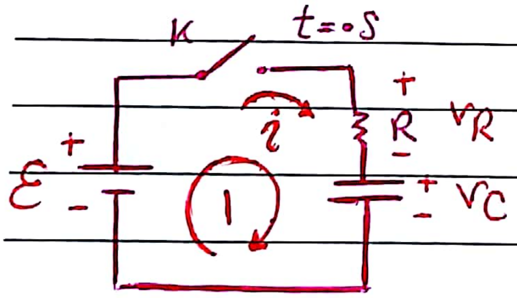


ولت‌سنج ← موازی در مدار ← جریان عبوری = ۰

دلیل ↓

مقاومت ∞ (خیلی بزرگ)

مدار ساده RC (متشکل از مقاومت و خازن)



$KVL: \mathcal{E} = V_R + V_C$

$V_R \to R i_C \to R\dfrac{dq_C}{dt}$ $\qquad V_C \to \dfrac{q_C}{C}$

AIDIN

$q_C(t=0) = 0$

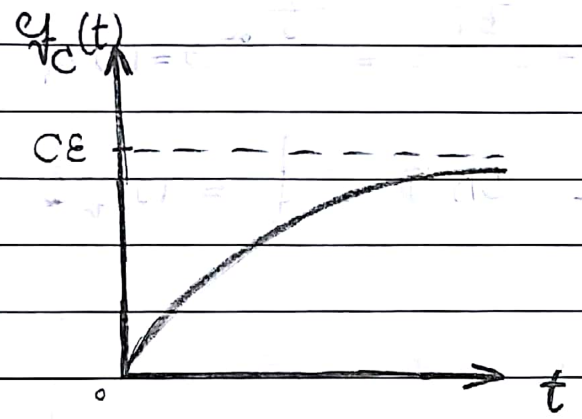
۱۴۸

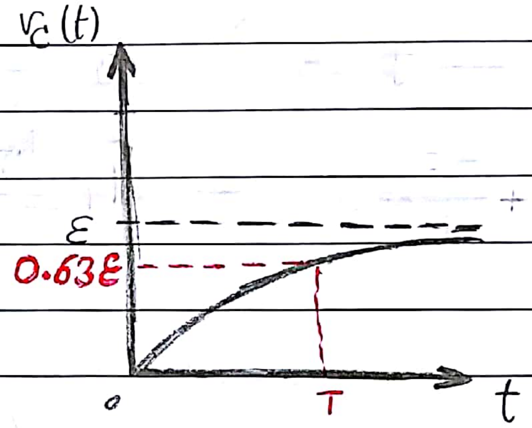
Subject:
Year: Month: Day:

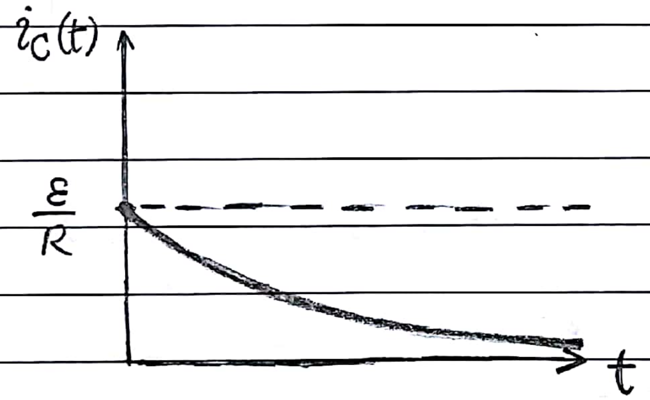
$$\rightarrow \begin{cases} R\dfrac{dq_C(t)}{dt} + \dfrac{q_C(t)}{C} = \mathcal{E}_C \\ q_C(t=0) = 0 \end{cases} \rightarrow q_C(t) = C\mathcal{E}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$\rightarrow v_C(t) = \frac{q_C(t)}{C} = \mathcal{E}\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$i_C(t) = \frac{dq_{\mathcal{E}}(t)}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

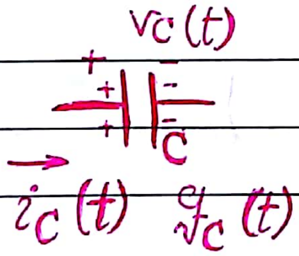






$t=0 \rightarrow$ C: اتصال کوتاه

$t=\infty \rightarrow$ C: اتصال باز

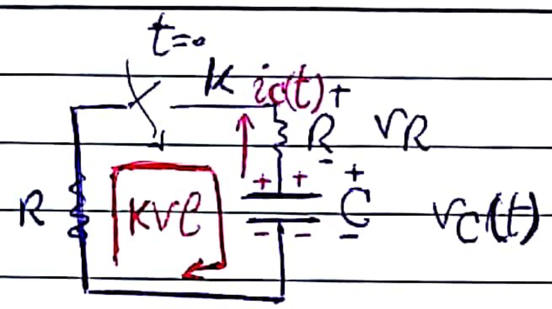


$$i_C(t) = \frac{dq_C(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(q_C(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(C\,v_C(t)\right) = C\frac{d}{dt}\left(v_C(t)\right) \rightarrow i_C(t) = C\frac{d}{dt}v_C(t)$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

دشارژ خازن :



$V_C(t=0) = V_0$

$$KVL: \quad V_R + V_C = 0$$

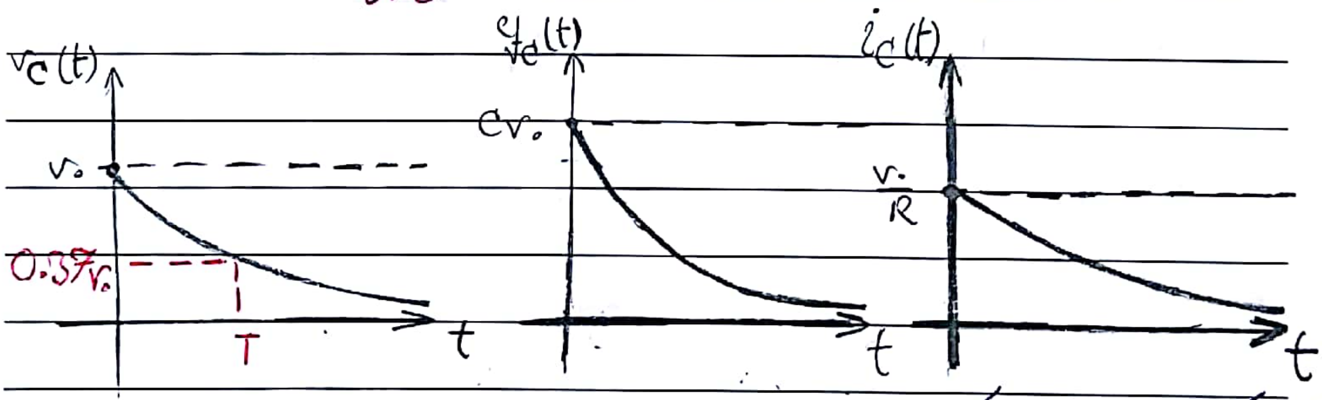
$$-R\underbrace{i_C(t)}_{-C\frac{d}{dt}V_C(t)} + V_C(t) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} RC\dfrac{dV_C(t)}{dt} + V_C(t) = 0 \\ V_C(t=0) = V_0 \end{cases} \longrightarrow V_C(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

$$V_C(0) = Ae^{-\frac{0}{RC}} = V_0 \rightarrow$$

$$V_0 = A \longrightarrow V_C(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i_C(t) = -C\frac{dV_C(t)}{dt} = -CV_0\left(-\frac{1}{RC}\right)e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$



$t=0 \longrightarrow C$: مشابه باتری به ولتاژ V_0

$t=\infty \longrightarrow C$: اتصال باز

نکته: اگر مقاومت بیش از یک عدد باشد ابتدا R_{eq} را حساب کرده سپس قوانین را با R_{eq} می‌نویسیم.

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

شارژ کامل خازن

چه زمانی v_C به بیشترین مقدار خود ($\mathcal{E}$) می‌رسد؟ زمانی که $t \to \infty$ میل کند.

T (ثابت زمانی) $= R_{eq}C$ if $t = 1\,RC = T \Rightarrow v_C(t) = \mathcal{E}(1-e^{-1})$

$= 0.63\,\mathcal{E}$

در یک مدار شارژ یا دشارژ

اگر برای $t>0$ معادله $v_C(t)$ فرض: $v_C(t) = \underline{Ae^{-\frac{t}{R_{eq}C}}} + B$

دیفرانسیل نخواهیم بنویسیم برای هر نوع RC (با یک خازن) $\to$ می‌دانیم در چنین مداراتی (RC) همواره برقرار است

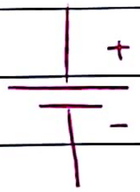
تعیین A و B: $(t=0) \to v_C(t=0) = 0 \to Ae^{0} + B =$

$A+B \to A+B = v_C(0)$ ممکن است v_C صفر نباشد

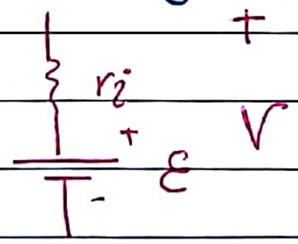
$(t\to\infty) \to v_C(\infty) = \underbrace{Ae^{-\infty}}_{0} + B = B$

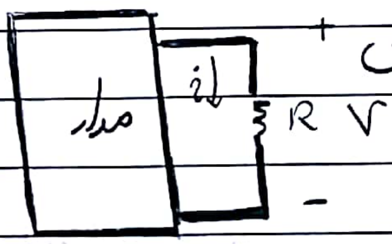
پس $\to v_C(t) = [v_C(0) - v_C(\infty)]\,e^{-\frac{t}{RC}} + v_C(\infty)$

باتری ایده‌آل:



باتری واقعی یا غیر ایده‌آل:





توان مصرفی مقاومت: $P = \frac{dw}{dt} = \frac{vi\,dt}{dt} = vi$

$dw = v\,dq = vi\,dt$ | $v = Ri \to P = Ri^2 = \frac{v^2}{R}$

AIDIN

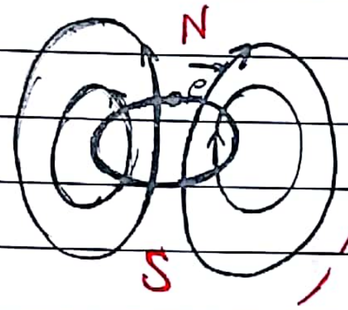
Subject:
Year: Month: Day:

مغناطیس:

(خاصیت مغناطیسی) بر اثر جابجایی بار الکتریکی (حرکت دورانی و انتقالی) خاصیت مغناطیسی بوجود می‌آید.

بار الکتریکی $\underset{\text{میدان الکتریکی}}{\overset{\text{نیروی الکتریکی}}{\rightleftarrows}}$ بار الکتریکی

بار الکتریکی متحرک $\underset{\text{میدان مغناطیسی}}{\overset{\text{نیرو مغناطیسی}}{\rightleftarrows}}$ بار الکتریکی متحرک



تعریف عملی میدان مغناطیسی:

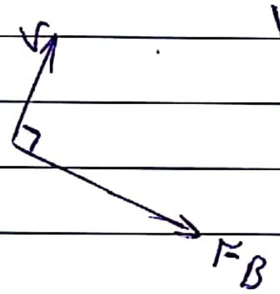
بار آزمون q_0

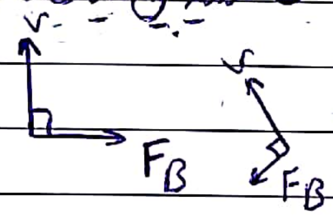
q_0 ثابت $\longrightarrow F_B = 0$

$q_0 \xrightarrow{v}$ $\quad F_B \propto |v|\,|q_0|\,\sin\theta$ — F_B به جهت و اندازه q_0 بستگی دارد.

θ: زاویه بین میدان B و سرعت v

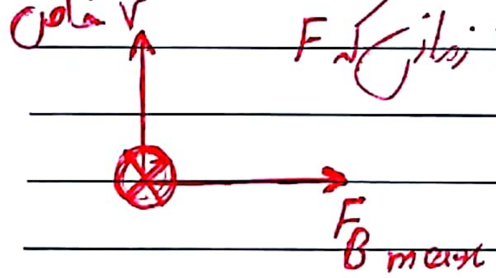
نکته: همواره F_B عمود بر v است.





$\longrightarrow$ جهت v متأثر در اندازه F_B

راستای میدان مغناطیسی برابر راستای عمود بر صفحه vF زمانی که F بیشینه است.



AIDIN $\longrightarrow F_B = |v|\,q_0 \sin\theta\,|B| \longrightarrow \vec{F}_B = q_0\,\vec{v} \times \vec{B}$

Subject:
Year: Month: Day:

واحد میدان مغناطیسی $1T = \frac{N}{C.\frac{m}{s}} = 1\frac{N}{A.m} = 10^4 G$

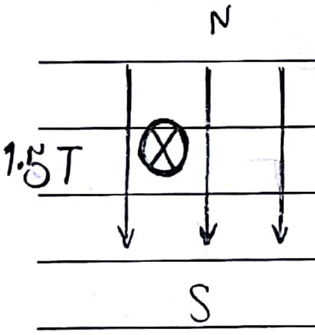
(T تسلا)

خطوط میدان مغناطیسی: ۱- جهت مماس بر خطوط میدان مغناطیسی، جهت و راستای میدان را نشان می دهد. ۲- چگالی خطوط، بیانگر شدت و ضعف میدان است.

نیروی مغناطیسی F_B هیچ کاری انجام نمی دهد. $W_B = \int \vec{F_B} \cdot \vec{dl} = \int F_B \cos 90 \, dl$

$= 0 \longrightarrow W_B = 0$

مثال ۱: یک میدان مغناطیسی یکنواخت افقی از شمال به جنوب با مقدار 1.5T موجود است. پروتونی با انرژی 5MeV به طور قائم و به طرف پایین در حرکت است. چه نیرویی بر آن وارد می شود؟



$K = 5MeV$

$\frac{1}{2} m v^2 = 5MeV$ $m_p = 1.7 \times 10^{-27} kg$

$1eV = 1.6 \times 10^{-19} C \times 1V = 1.6 \times 10^{-19} J$

$\longrightarrow 8 \times 10^{-13} J = \frac{1}{2} \times 1.7 \times 10^{-27} \times v^2 \longrightarrow$

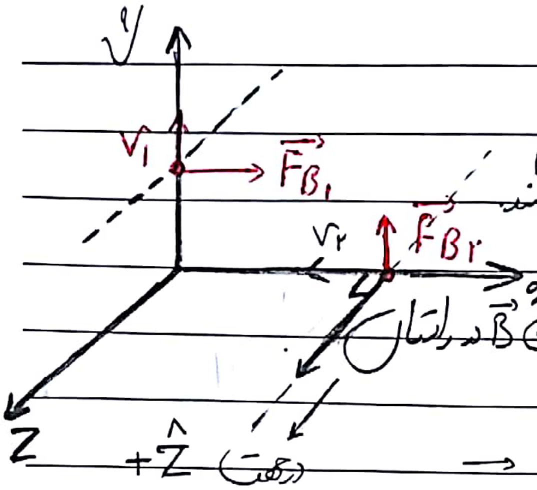
$v = 3.1 \times 10^7 m/s$ $\vec{F_B} = 1.6 \times 10^{-19} C \times 3.1 \times 10^7 \times 1.5 T = 7.4 \times 10^{-12} N$

مثال ۲: به پروتونی با سرعت $v = 3.6 \times 10^4 (m/s)(\hat{j})$ در یک میدان مغناطیسی یکنواخت نیرویی برابر با $7.04 \times 10^{-16} N \hat{x}$ وارد می شود. به پروتون دیگر که روی محور x در حال حرکت است، نیروی معادل $2.8 \times 10^{-16} N \hat{y}$ وارد می شود. اندازه و جهت میدان مغناطیسی و سرعت پروتون

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

دوم رابطه را اورده $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$



F_B بر B و v عمود است و دلیل وجهی ساده که قطعاً v_2 و B_2 بر هم عمود باشند.

جهت $\vec{B}$: چون $\vec{F}_{B_1}$ و $\vec{F}_{B_2}$ بر میدان $\vec{B}$ عمود هستند پس باید میدان $\vec{B}$ در راستای محور Z باشد

$+\hat{Z}$ (در جهت) $\longrightarrow F_B = q_1 v_1 B \sin 90 = q_1 v_1 B$

$$\longrightarrow B = \frac{F_B}{q_1 v_1} = \frac{7.4\times10^{-16}\,N}{1.6\times10^{-19}\,C \times 3.6\times10^{4}\,m/s} = 1.28\times10^{-1}\,T$$

$$F_{B_2} = q_2 v_2 B_2 \underbrace{\sin\theta}_{1} = q_2 v_2 B_2 \longrightarrow v_2 = \frac{F_{B_2}}{q_2 B_2} = \frac{2.8\times10^{-16}\,N}{1.6\times10^{-19}\,C \times 1.28\times10^{-1}\,T}$$

$$= 1.36\times10^{4}\,m/s$$

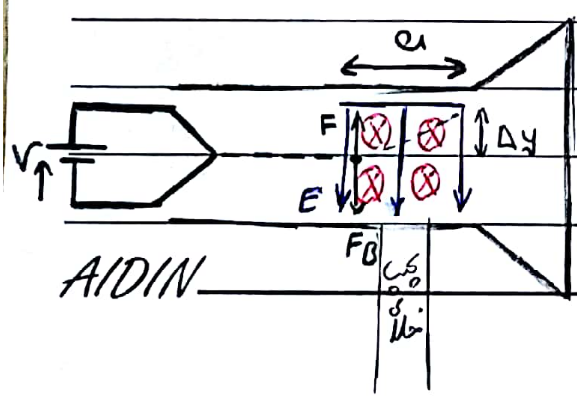
نیروی لورنتس:

در فضایی که هم خاصیت مغناطیسی و هم خاصیت الکتریکی داریم، خواهیم داشت:

$$F = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

نیروی لورنتس

کاربرد میدان‌های متعامد ـ تفنگ الکترون.



آزمایش ۱

$$y = \frac{1}{2}at^2 \longrightarrow y = \frac{1}{2}a\frac{x^2}{v^2}$$

$$x = v_H t \qquad t = \frac{x}{v_H}$$

$$\longrightarrow \Delta y = (a)\frac{x^2}{2v^2}, \qquad a = \frac{qE}{m}$$

AIDIN

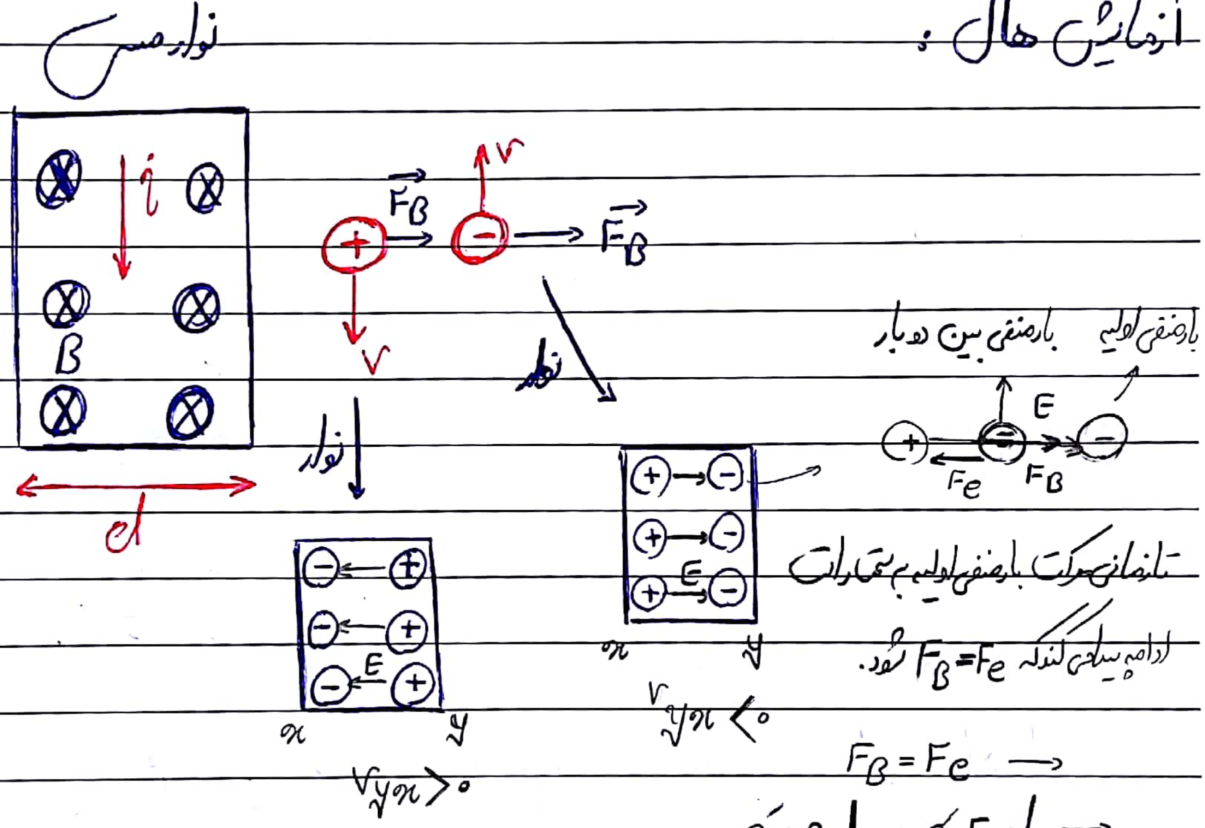
Subject: آزمایش ۲

Year: Month: Day:

$F_e = F_B \rightarrow qE = qvB \rightarrow v = \frac{E}{B}$

$\xrightarrow{\text{ص}} \Delta y = \frac{qE}{m} \frac{x^2}{2(\frac{E}{B})^2} \Rightarrow \frac{q}{m} = 2\Delta y \frac{E}{B^2 x^2}$

آزمایش هال:



تا زمانی حرکت بارمنفی اولیه به سمت راست ادامه پیدا می‌کند که $F_B = F_e$ شود.

$F_B = F_e \rightarrow$

$evBd = eEd \rightarrow$

$vBd = V_{yx}$

$\frac{j}{ne} = \frac{i}{neA} \rightarrow d$

$\rightarrow V_{yx} = vBd = \frac{j}{ne} Bd = \frac{iB}{ne}$

مثال: رسانای متحرک درمیدان مغناطیسی

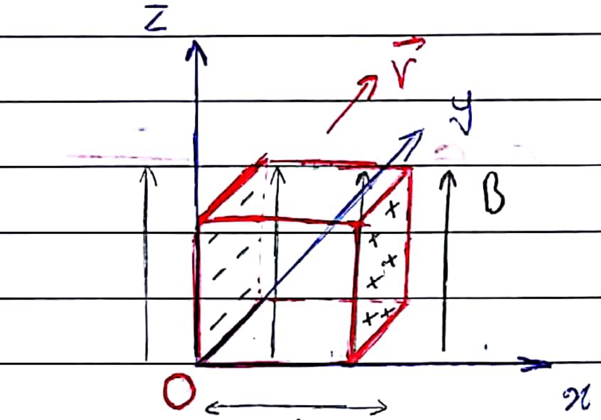
یک مکعب فلزی توپر به ضلع $d = 1.5cm$ در جهت $\hat{j}$ با سرعت $\vec{v}$ به بزرگی $4 \, m/s$ د

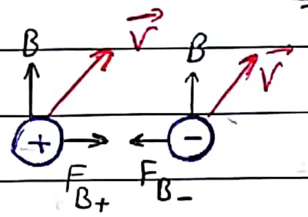
AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

حرکت است، در نظر بگیرید. در این جسم یک میدان مغناطیسی یکنواخت به بزرگی 0.05T در جهت $\hat{z}$ وجود دارد. بین کدام دو صفحه و چه اختلاف پتانسیل الکتریکی ایجاد می‌شود؟

دو صفحه‌ی موازی صفحه‌ی yoz



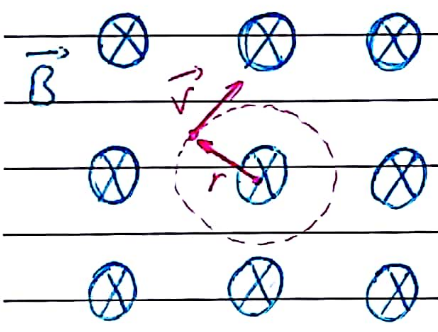


$$V = vB\ell = 4\,m/s \times 0.05\,T \times 1.5\times10^{-2}\,m = 3\,mV$$

l (فاصله‌ی بین بارهای مثبت و منفی)

بارهای در حال دوران:

$$F = q\vec{v}\times\vec{B}$$



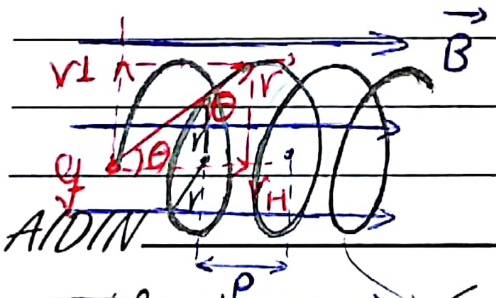
سرعت خطی

$$F = ma = m\frac{v^2}{r} \xrightarrow{\theta=90^\circ} qvB = m\frac{v^2}{r}$$

$$\to r = \frac{mv}{qB} \qquad W = \frac{2\pi}{T},\quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

مدت زمان یک دور کامل — خطی

$$\to W = \frac{2\pi}{\frac{2\pi r}{v}} = \frac{v}{r} = \frac{v}{\frac{mv}{qB}} = \frac{qB}{m}, \quad T = \frac{2\pi m}{qB}$$



مسیر حرکت ذره به صورت حلقه با شعاع r

$$\vec{v} = \vec{v}_H + \vec{v}_\perp \qquad \begin{cases} \vec{v}_H = v\cos\theta \\ \vec{v}_\perp = v\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B} = q(\vec{v}_H + \vec{v}_\perp)\times\vec{B} =$$

θ: زاویه‌ی بین بردار $\vec v$ و میدان $\vec B$

Subject:
Year: Month: Day:

$$q\,(\underbrace{\vec{V_H}\times\vec{B}}_{0} + \vec{V_\perp}\times\vec{B}) = qVB\sin\theta$$

شعاع حلقه $r = \dfrac{mV_\perp}{qB} = \dfrac{mV\sin\theta}{qB}$

گام پیچ (مسافتی که ذره طی یک دور کامل به سمت جلو (راستای میدان B) حرکت می‌کند) $P = vt = V_H T = VT\cos\theta = V\cos\theta\,\dfrac{2\pi m}{qB}$

تمرین: $B = 0.15T$ در جهت مثبت محور x، پروتونی با بار $1{,}6\times10^{-19}C$ با سرعت $8\times10^{6}\,m/s$ با زاویه ۳۰° نسبت به B پرتاب می‌شود. $m = 1{,}67\times10^{-27}kg$ شعاع مسیر مارپیچ و گام پیچ؟

$V = 8\times10^{6}\,m/s$

$V_H = V\cos30° = 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times10^{6}\,m/s = 6{,}93\times10^{6}\,m/s$

$V_\perp = V\sin30° = 4\times10^{6}\,m/s$

ans: $r = 0.278\,m$, $P = 3.03$

$B = 0{,}015T$

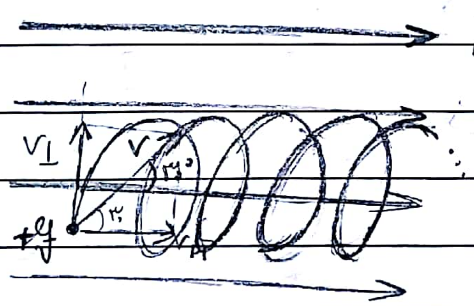
$q = 1{,}6\times10^{-19}C$

$v = 8\times10^{6}\,m/s$

$\theta = 30°$

$m = 1{,}67\times10^{-27}kg$

$B = 15\times10^{-3}\times10^{4}G = 150G$



$$r = \frac{mV_\perp}{qB} = \frac{1{,}67\times10^{-27}kg\times4\times10^{6}\,m/s}{1{,}6\times10^{-19}C\times15\times10^{-3}T} = \frac{6{,}68}{24}\times10^{0}$$

تبدیل کسر ← گوشی

$$r = \frac{6{,}68}{24} = 0{,}278\,m$$

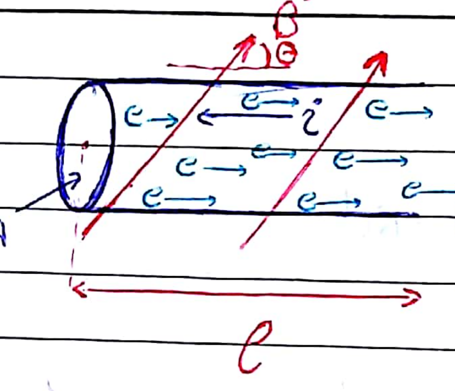
$$P = V_H\frac{2\pi m}{qB} = 6{,}93\times10^{6}\,m/s\;\frac{2(3{,}14)\times1{,}67\times10^{-27}kg}{1{,}6\times10^{-19}C\times15\times10^{-3}T} = \frac{72{,}7}{24}\times10^{0}$$

AIDIN

با تبدیل آن ← گوشی

$P = 3{,}03\,m$

Subject:
Year: Month: Day:



نیروی وارده بر سیم حامل جریان:

نیروی وارده بر هر بار متحرک: $\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B} =$

$-e\vec{v}_d\times\vec{B} = \frac{\vec{j}}{n}\times\vec{B}$

$\vec{v}_d = -\frac{\vec{j}}{ne}$

سرعت سوق در خلاف جهت $\vec{j}$ است

N: تعداد e های آزاد موجود در طول L از رسانا

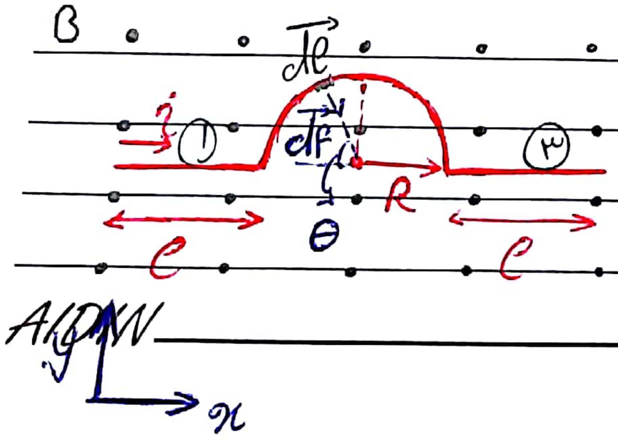
$$\vec{F} = \sum \vec{f}_e = N\frac{\vec{j}}{n}\times\vec{B} = \ell \underbrace{A\vec{j}}_{\vec{\ell}\, i}\times\vec{B} = i\,\vec{\ell}\times\vec{B}$$

$N = n(A\ell)$ ← چگالی الکترون‌های رسانا

اندازه آن برابر با طول سیم و جهت آن، جهت چگالی جریان

در حالت کلی: $\vec{F}_B = \int d\vec{F}_B = \int i\, d\vec{\ell}\times\vec{B}$

مثال: یک سیم حامل جریان i مطابق شکل خم شده است و در میدان مغناطیسی یکنواخت B که جهت آن به طرف خارج صفحه است قرار گرفته. نیروی وارده بر سیم را حساب کنید.

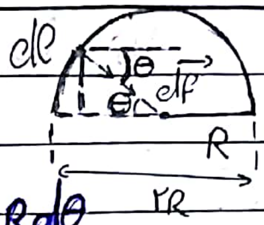


$F_1 = F_3 = i\vec{L}\times\vec{B} = i\ell B\sin 90 =$
$i\ell B(-\hat{j})$

$d\vec{F}_B = i\,d\vec{\ell}\times\vec{B} = i\,d\ell B\sin 90\,(-\hat{r})$

Subject:
Year: Month: Day:

$$\rightarrow \vec{F}_B = \int d\vec{F}_B = \int i\,dl\,B(-\hat{r})$$



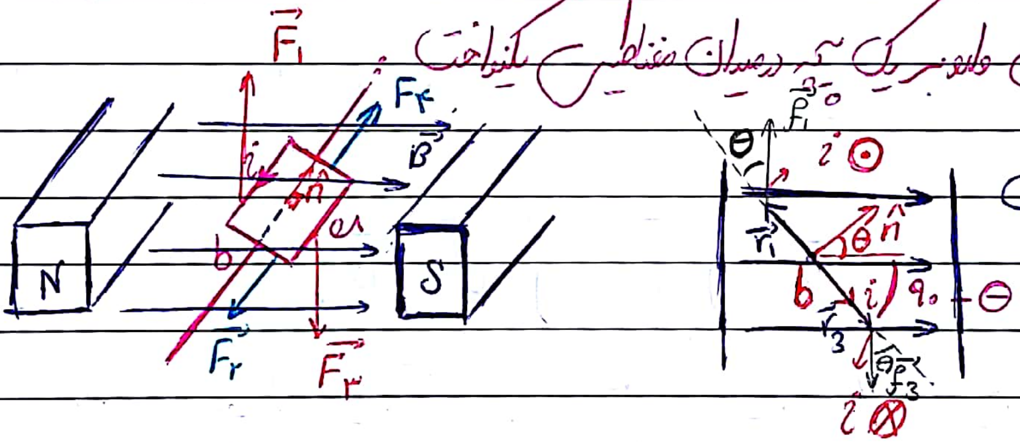
$$= \hat{x}\underbrace{\int i\,dl\,B\cos\theta}_{\text{صفر} \leftarrow \text{تقارن}} - \hat{y}\int i\,dl\,B\sin\theta \xrightarrow{dl = R\,d\theta} \vec{F}_B = -\hat{y}\,iRB\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$$

$$= -\hat{y}\,iRB\times 2 = -2iRB\,\hat{y} = -2RiB\,\hat{y}$$

پس اگر B یکنواخت باشد می‌شود از تصویر صفحش در زیر خصوص سو برد. (i هم ثابت)

$$\rightarrow \vec{F} = \int i\,d\vec{l}\times\vec{B} = \underbrace{i}_{\text{ثابت}}\Big(\underbrace{\int d\vec{l}}_{2R\hat{x}}\Big)\times\underbrace{\vec{B}}_{\text{بردار ثابت}} = -i\,2RB\,\hat{y}$$

نیروی مغناطیسی وارد بر یک پیچه در میدان مغناطیسی یکنواخت:



بردار یکه عمود بر $\hat{n}$ تعریف
سطح پیچ

$$|\vec{F}_3| = |\vec{F}_1| = iaB\sin 90$$

$$|\vec{F}_4| = |\vec{F}_2| = ibB\sin(90-\theta)$$

۹۰: زاویه بین بردار ضلع شامل a و میدان B است.

نه خنثی و نه گردش

گشتاور:
$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1\times\vec{F}_1 = \left(\frac{b}{2}\right)iaB\sin\theta \quad \otimes$$

$$\vec{\tau}_3 = \vec{r}_3\times\vec{F}_3 = \left(\frac{b}{2}\right)iaB\sin\theta \quad \otimes$$

AIDIN

۵۹

Subject:
Year: Month: Day:

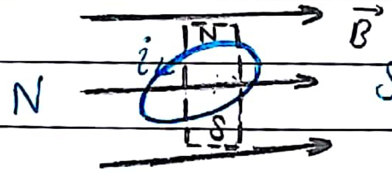
$$\vec{\tau}' = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_3 = i a b B \sin\theta \otimes$$

برای N تا حلقه در $\vec{\tau}' = N i \underbrace{ab}_{A} B \sin\theta \otimes$ → A مساحت شکل داده شده (پیچه، دایره و ...)

در N تعداد: $\vec{\tau} = \vec{\tau}_1' + \vec{\tau}_2' + \cdots + \vec{\tau}_n'$

تعریف: گشتاور مغناطیسی $\vec{\mu} = i A \hat{n}$ پس $\vec{\tau} = N\vec{\mu} \times \vec{B}$ برای N در

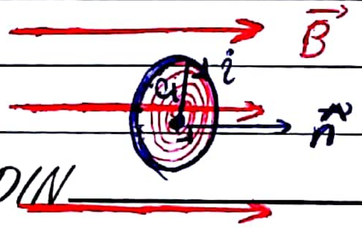
در N: $\vec{\mu}_{کل} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 + \cdots + \vec{\mu}_N$



انرژی لازم جهت جابجایی بردار $\hat{n}$ از $-\frac{\pi}{2}$ تا α $\Rightarrow W = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \tau\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} N i A B \sin\theta' d\theta'$

$$= \underbrace{NiAB}_{\mu} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \sin\theta' d\theta' = \mu B \left(-\cos\theta'\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

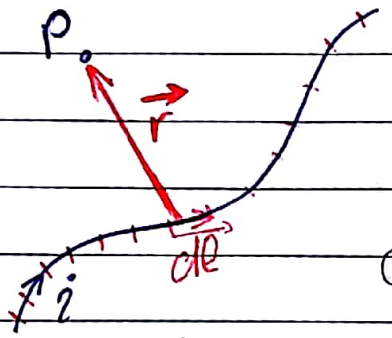
مثال: یک پیچه دایروی با N دور دارای شعاع مؤثر a و جریان i است. چه قدر کار لازم است تا این پیچه در میدان خارجی $\vec{B}$ از وضعیت $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ برود؟



AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

محاسبهٔ میدان مغناطیسی ناشی از سیم حامل جریان:

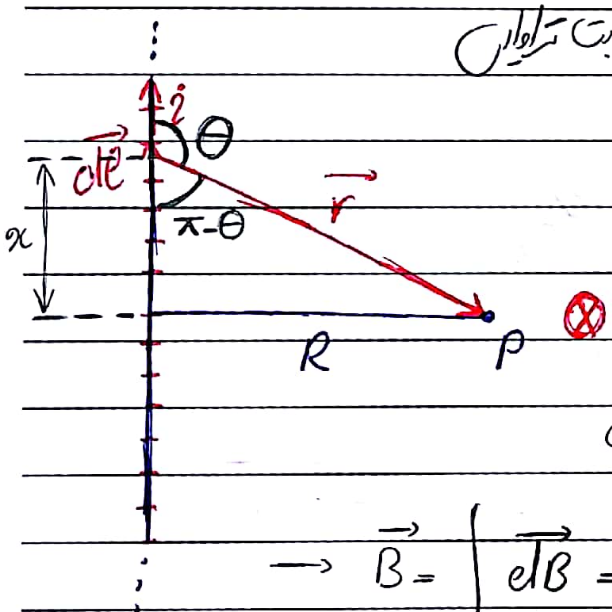


قانون بیو-ساوار:

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3} \longrightarrow \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\vec{B} = \int \vec{dB} \longrightarrow \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T.m}{A}$$

ثابت تراوایی



میدان ناشی از سیم بلند طویل:

بی نهایت

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\vec{dl} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl\, r \sin\theta}{r^3}$$

$$\longrightarrow \vec{B} = \int \vec{dB} = \otimes \int \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} dl \rightarrow dx \quad (I)$$

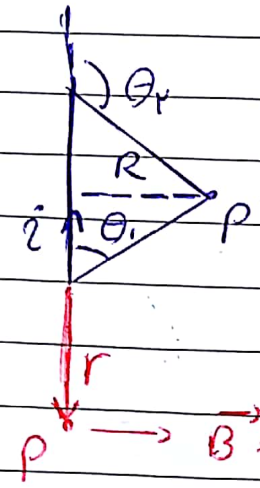
$$r = \frac{R}{\sin(\pi-\theta)} \qquad x = R\cot(\pi-\theta) \rightarrow dx = R \frac{1}{\sin^2(\pi-\theta)} d\theta$$

$$\longrightarrow dx = \frac{R\, d\theta}{\sin^2\theta} \longrightarrow I: \vec{B} = \otimes \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{\sin\theta}{\frac{R^2}{\sin^2\theta}} \frac{R\, d\theta}{\sin^2\theta} =$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

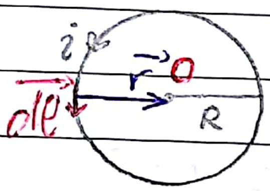
$$\otimes \frac{\mu_0 i}{4\pi R}\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = \otimes \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$$



$$\longrightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

$\longrightarrow \vec{B} = 0$

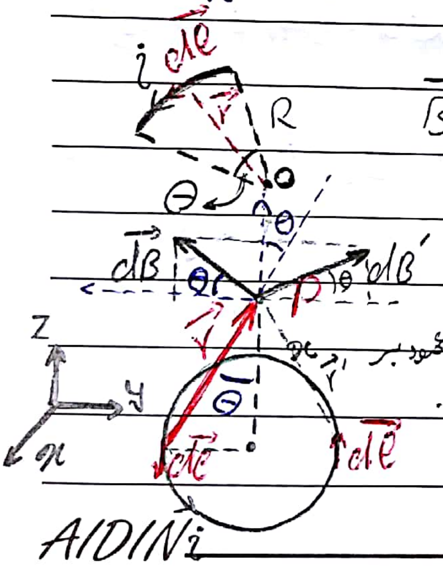
میدان مغناطیسی ناشی از حلقه جریان: (در مرکز حلقه)



$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3} \longrightarrow dl \times r \odot$$

$$\longrightarrow \vec{B} = \int \vec{dB} = \odot \int \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{r^2} = \odot \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{1}{R^2}\underbrace{\int dl}_{2\pi R}$$

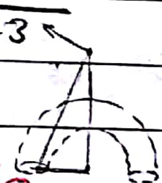
$$= \frac{\mu_0 i}{2R} \odot$$



$$\vec{B} = \int \vec{dB} = \odot \frac{\mu_0 i}{4\pi R^2}\overbrace{\underbrace{\int dl}_{\text{طول کمانی از محیط دایره}}}^{R d\theta} = \frac{\mu_0 i \theta}{4\pi R} \odot$$

$d\vec{l}$ و i عمود بر $\vec{r}$ هستند.

$$|\vec{dB}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3} \quad dl \times r$$



$$dB_z = |dB| \sin\theta$$

$$dB_H = |dB| \cos\theta$$

dl ، $i \odot$

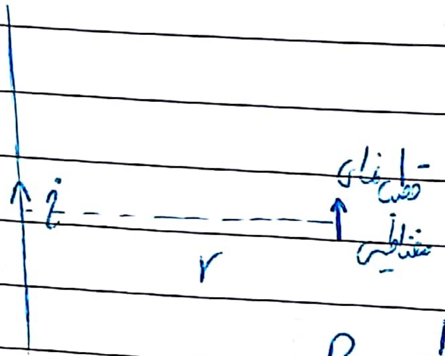
AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

$$\rightarrow \vec{B} = \int d\vec{B} = \int d\vec{B}_z + \underbrace{\int dB_H}_{\text{تقارن} \to 0} = \hat{z}\int \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{r^2}\sin\theta =$$

$$\hat{z}\,\frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r^2}\underbrace{\int dl}_{2\pi R} \qquad \begin{cases} \sin\theta = \dfrac{R}{\sqrt{x^2+R^2}} \\ r^2 = x^2+R^2 \end{cases} \longrightarrow \vec{B} = \hat{z}\,\frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

قانون آمپر



$$B \propto \frac{i}{r}$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r} \longrightarrow \underline{B(2\pi r)} = \mu_0 i$$

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{l} \xrightarrow{\theta = 0} \int B\,dl\,\underbrace{\cos 0}_{1}$$

روی دایره ای به شعاع r ← شرط ← B ثابت با r

این قانون مشابه قانون گاوس (مشابه E روی سطح بسته) است با این تفاوت که این قانون روی هر مسیر بسته قابل بیان است.

قانون →

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

روی هر مسیر بسته

کل جریان عبوری از سطح محصور داخل مسیر بسته

AIDIN

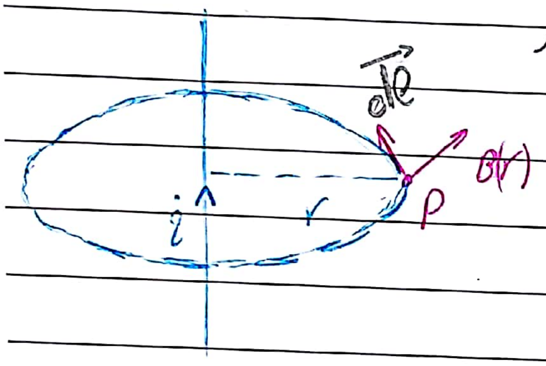
Subject:
Year: Month: Day:

حالت تقارن ۲: اگر سیم بسیار طویل و یا استوانه‌ای طویل داشته باشیم، می‌توانیم بگوییم که میدان مغناطیسی عمود بر راستای شعاع و تابعی از r است. B(r) (جهت مماس بر راستای شعاع)

محاسبه میدان مغناطیسی اطراف یک سیم بسیار بلند (بدون قانون آمپر)

زحمت بشر

قانون آمپر: $\oint \vec{B}(r)\cdot d\vec{l} = \mu_0 i \longrightarrow B(r)\underbrace{\oint dl}_{\text{روی مسیر دایره‌ای به شعاع } r} = \mu_0 i$



روی مسیر دایره‌ای به شعاع r که از نقطه P می‌گذرد.

$$\Longrightarrow B(r)\cdot 2\pi r = \mu_0 i \Longrightarrow B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

نکته: اگر دایره‌ی ما کامل نباشد (ناقص باشد)، ابتدا کامل فرض کرده و B را قائم می‌کنیم. همچنین می‌توانیم بگوییم به این خاطر که B نسبت به r ثابت است، میدان ناشی از قطاع در نقطه P برابر است با:

درصد طول قطاع از کل دایره $\times \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ $\xrightarrow[\text{ربع دایره}]{\text{مثلاً برای}}$ $B(r) = \left(\frac{1}{4}\right)\frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{\mu_0 i}{8\pi r}$

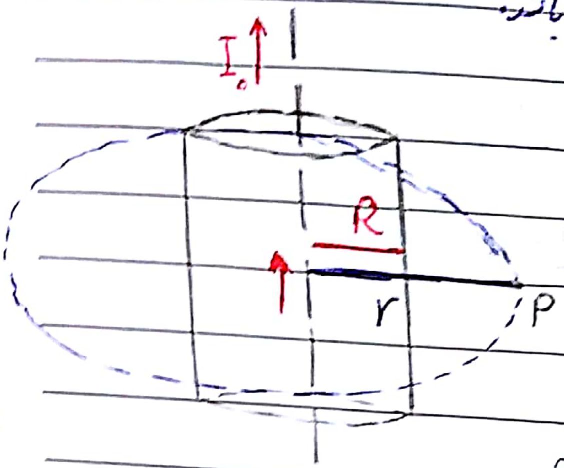
مثال: یک سیم استوانه‌ای دراز به شعاع R را در نظر بگیرید. میدان مغناطیسی ناشی از این سیم در تمام نقاط فضا (در فاصله‌ی r از محور مرکزی سیم) بدست آورید اگر:

الف) جریان یکنواخت و برابر با i باشد.

Subject:
Year: Month: Day:

ب) اگر چگالی جریان عبوری از سیم $\vec{J}(r) = \frac{\dot{J}_0}{r}$ باشد.

الف) $\vec{B} = B(r)$ و جهت آن عمود بر شعاع (r)

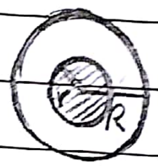


$r > R$: $\underbrace{\oint \vec{B}(r) \cdot \vec{dl}}_{\text{روی دایره به شعاع } r} = \mu_0 I_0$

$\rightarrow \oint B(r)\, dl \cos 0 = \mu_0 I_0 \rightarrow$

$B(r)\, 2\pi r = \mu_0 I_0 \rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$

$r < R$: $\underbrace{\oint \vec{B}(r) \cdot \vec{dl}}_{\text{روی دایره به شعاع } r} = \mu_0 I$

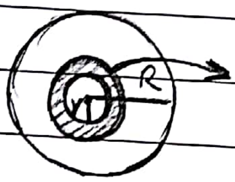


$J_0 = \frac{I_0}{\pi R^2} \rightarrow$

$I = J_0 (\pi r^2) \rightarrow I = I_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I_0 \left(\frac{r^2}{R^2}\right)$

$\rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_0 \frac{r^2}{R^2}}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_0 r}{2\pi R^2}$

ب) $r > R$: $J(r) = \frac{\dot{J}}{r}$



$dI = \frac{\dot{J}_0}{r'} \times 2\pi r' dr' \rightarrow$

$I = \int_0^R \frac{\dot{J}_0}{r'} 2\pi r' dr' = 2\pi \dot{J}_0 R$

$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 (2\pi \dot{J}_0 R)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \dot{J}_0 R}{r}$

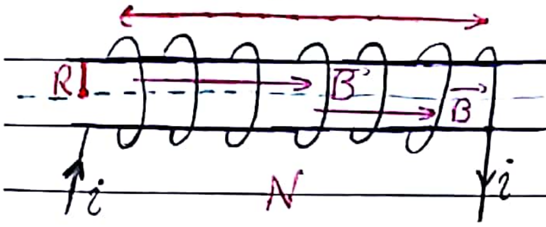
$r < R$: $dI = \frac{\dot{J}_0}{r'} 2\pi r' dr' \rightarrow I = \int_0^r \frac{\dot{J}_0}{r'} 2\pi r' dr' \rightarrow$

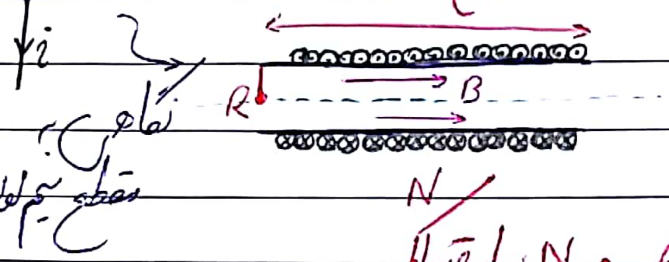
$I = \dot{J}_0 2\pi r \rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 \dot{J}_0 2\pi r}{2\pi r} = \mu_0 \dot{J}_0$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

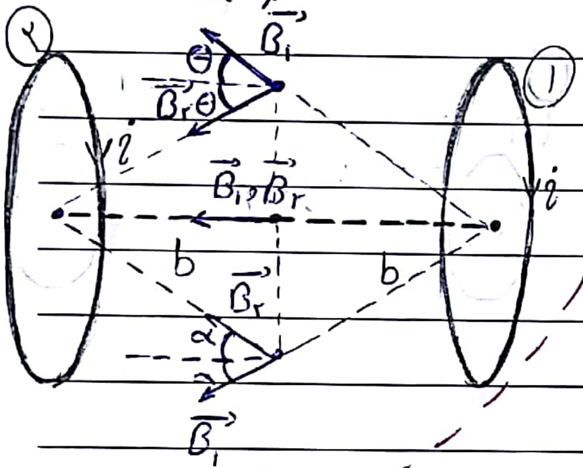
سیم لوله: سیم لوله هم عرض خازن در الکتریسیته است.

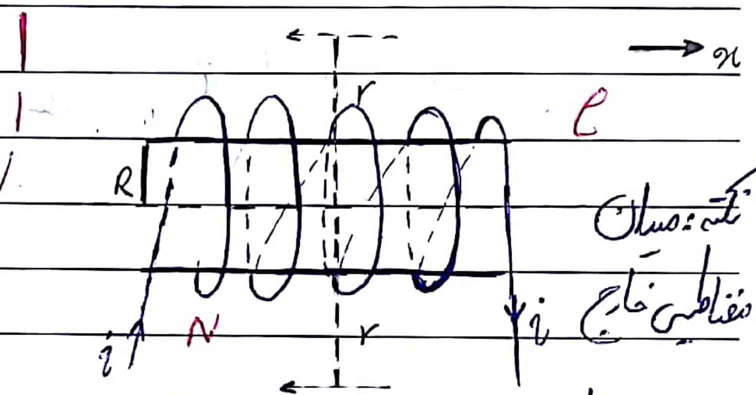




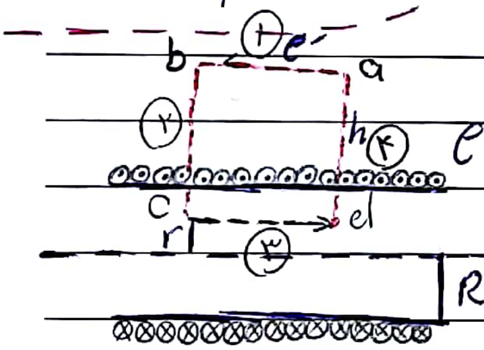
$\ell \gg R$ و N بسیار زیاد

$\vec{B} = \vec{B}(r)$ ← B تابع ℓ (یا x) و θ نیست و فقط تابعی از r است.





نکته: میدان مغناطیسی خارج از سیم لوله صفر است.



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \underbrace{\int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{\ell}}_{0} + \underbrace{\int_b^c \vec{B}\cdot d\vec{\ell}}_{} + \int_c^d \vec{B}\cdot d\vec{\ell} + \underbrace{\int_d^a \vec{B}\cdot d\vec{\ell}}_{\theta=90^\circ} = \int_c^d \vec{B}(r)\cdot d\vec{\ell} \overset{\theta=90^\circ}{=} \int_c^d B(r)\, d\ell \cos(0)$$

$$= B(r)\int_c^d d\vec{\ell} = B(r)\,\ell' = \mu_0 I \longrightarrow I = n\ell i \qquad n = \frac{N}{\ell} \longrightarrow$$

جریان درون مسیر برابر با جریانی است که سیم های موجود در مسیر ایجاد می کنند.

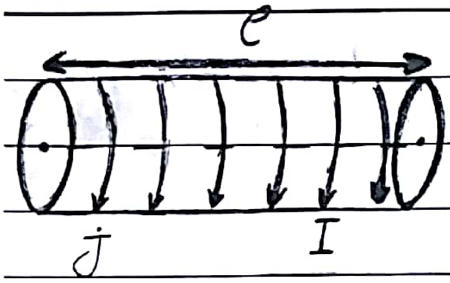
چگالی دورهای سیم روی استوانه

$$B(r) = \mu_0 n i$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

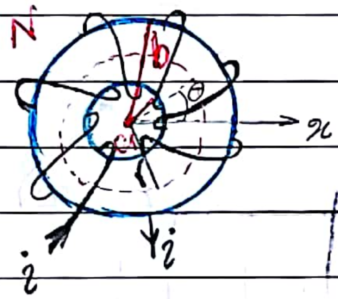
محاسبهٔ میدان مغناطیسی سیم استوانه ای (سیم لوله نیت)



$j = \frac{i}{\ell}$

$B = ?$

چنبره: (N بزرگ و دورهای سیم متراکم)



a: شعاع داخلی

b: شعاع خارجی

N: تعداد دور سیم

B تابع θ نیست چون جسم را بچرخانیم دقیقاً تکرار می شود.

$a < r < b$

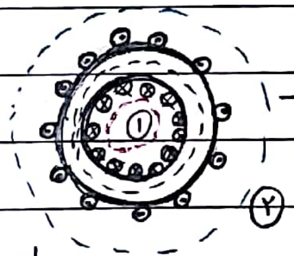
۱- میدان در راستای عمود بر شعاع

حلقه (دایره) ⟵ مسیر مناسب

۲- $\oint \vec{B}(r) \cdot d\vec{\ell} = B(r) \cdot 2\pi r$

$\oint \vec{B}(r) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$

I :

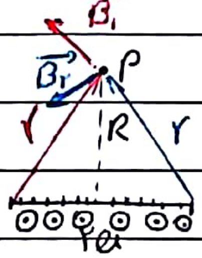


⟶ $I = Ni$

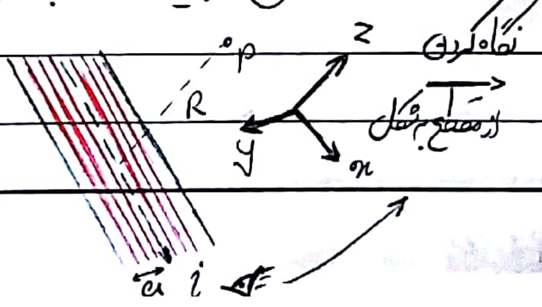
⟶ $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 N i(t)}{2\pi r}$

B در مسیرهای ۱ و ۲ صفر است. دلیل ⟵ در مسیر ۱ جریان صفر است و در مسیر ۲ مجموع جریان ها صفر است و حذف می شوند.

خنثی شدن جریان ها اگر با هم اگر



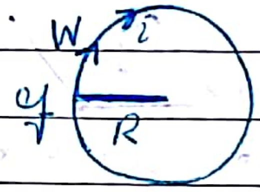
مثال :



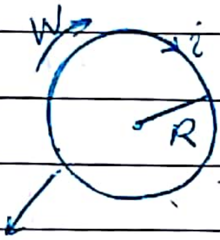
AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

مثال:

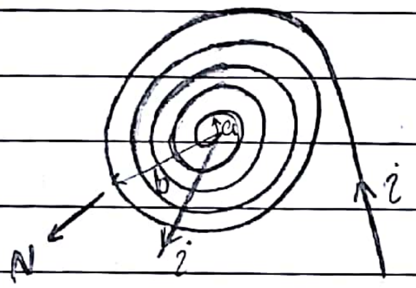


$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q}{T}$



$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\lambda \ell}{T} = \frac{\lambda 2\pi r}{T}$

$\lambda (C/m)$



$\rightarrow$

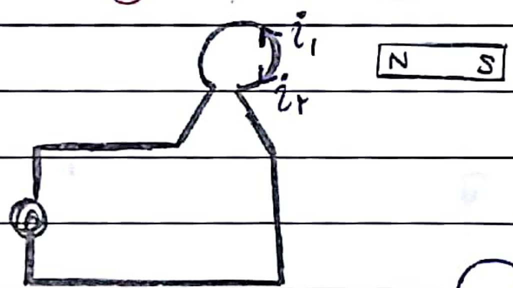
$dr \rightarrow di \rightarrow \int dr$

$I = Ni$

$i = \frac{I}{b-a}$

قانون القای فارادی

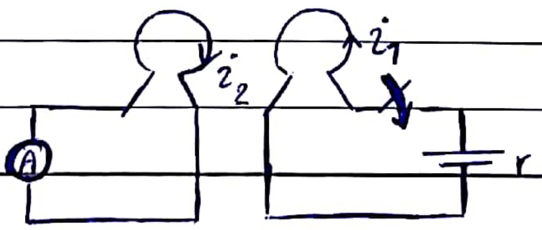
وارد کردن نیرو به بارهای ثابت و متحرک ← ایجاد میدان الکتریکی ← تغییر میدان مغناطیسی بر حسب زمان



تغییر میدان مغناطیسی با آهنربا:

نزدیک کردن آهنربا به حلقه : i_1

i_2 : « « دور « « «



تغییر میدان مغناطیسی با کلید:

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

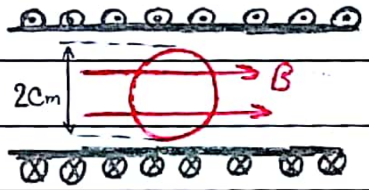
تعریف شار مغناطیسی : $\Phi_B = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}$ $\qquad 1wb = 1T\cdot 1m^2$

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{l} = \mathcal{E}_{ind} = -\frac{N\,d\Phi_B}{dt}$$

در صورتی می‌توان $\mathcal{E}$ را N برابر کرد که: N حلقه در یک موقعیت باشند.

$\mathcal{E}_{ind} \to$ induction القایی

مثال: سیم لوله‌ی درازی در هر cm ۲۰۰ دور سیم دارد و حامل جریان 1.5A است. قطر این سیم لوله 3cm می‌باشد. در مرکز سیم لوله یک پیچه ۱۰۰ دوری به قطر 2cm قرار می‌دهیم به طوری که B درون پیچه با محور سیم لوله موازی است. جریان سیم لوله در مدت 0.05s به طور یکنواخت از مقدار 1.5A به -1.5A می‌رسد، هنگام تغییر جریان سیم لوله نیروی محرکه القایی در پیچه چقدر است!



$$\mathcal{E} = N\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \Phi_B = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} =$$

$$\oint_S B\,ds\,\underbrace{\cos 0^\circ}_{1} = B\oint_S ds = \underbrace{B}_{\mu_0 n i}\pi r^2$$

$$\to \Phi_B = \mu_0 n i\cdot\pi r^2 = (4\pi\times10^{-7})(200\times10^{-2})\,i\,(\pi\times(0.01)^2)$$

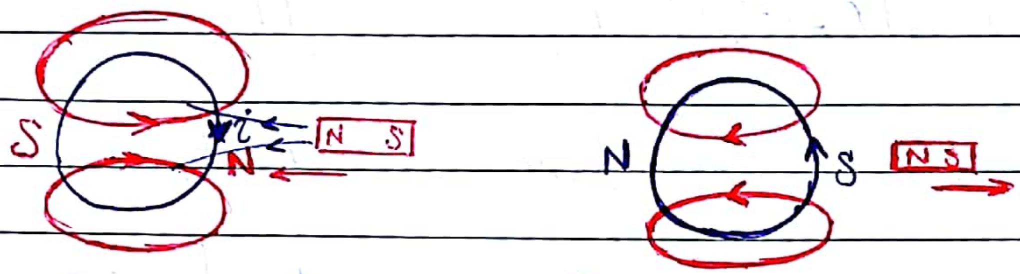
$$\to \mathcal{E} = N\frac{d}{dt}(\mu_0 n i s) = N\mu_0 n s\frac{di}{dt} \xrightarrow{i\text{ یکنواخت}} \frac{di}{dt} = \frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{1.5-(-1.5)}{0.05}$$

$$\to \mathcal{E} = 48\times10^{-3}\,V$$

AIDIN

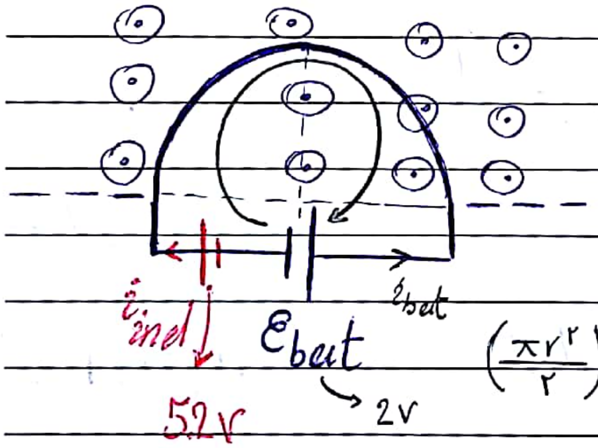
Subject:
Year: Month: Day:

قانون لنز: جهت جریان در حلقه همواره به سمتی است که با شار مغناطیسی مخالفت می‌کند



مثال: یک حلقه رسانا شامل یک نیم دایره به شعاع $r = 0.2m$ و سیم‌کشی مستقیم مفروض است. نیم دایره در میان مغناطیسی یکنواخت B که جهت آن رو به سمت خارج نیم صفحه دایره است، قرار دارد. بزرگی این میدان با رابطه $B(t) = ۴t^۲ + ۲t + ۳$ داده شده است، که B برحسب T و t برحسب ثانیه داده شده است. یک باتری ایده‌آل با $\varepsilon_{bat} = 2V$ مطابق شکل به حلقه متصل شده است. مقاومت حلقه 2Ω است.

الف) بزرگی و جهت نیروی محرکه القایی در لحظه $t = 10s$ ؟



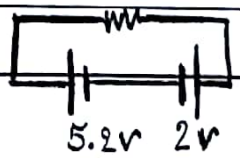
$$\phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot \vec{ds} = B \oint_S ds = B\left(\frac{\pi r^۲}{۲}\right)$$

$$\varepsilon_{ind} = \frac{d\phi_B}{dt} = \left(\frac{\pi r^۲}{۲}\right)\left(\frac{dB}{dt}\right) = \left(\frac{\pi r^۲}{۲}\right)(8t+2)$$

الف) $\varepsilon_{ind}(10s) = \frac{3.14 \times 0.04}{2}(82) = 5.2V$

ب) جریان حلقه در $t = 10s$ ؟

$$i_{حلقه} = \frac{V_{eq}}{R} = \frac{(5.2-2)V}{2\Omega} = \frac{3.2}{2} = 1.6\,A$$

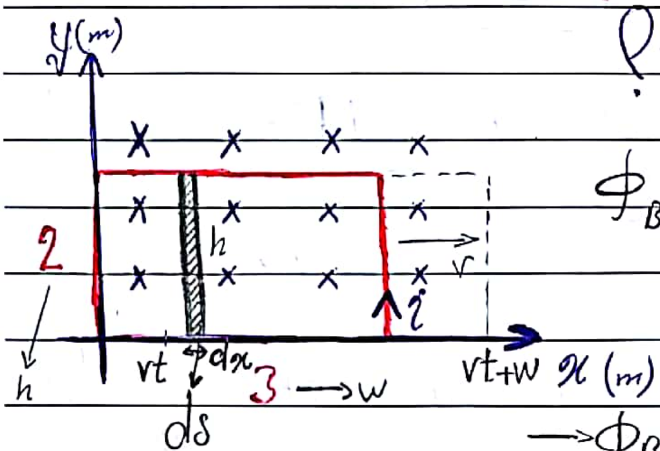


AIDIN

تغییر با زمان
تغییر با مکان

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: یک حلقه‌ی مستطیلی داخل یک میدان مغناطیسی نایکنواخت و متغیر $\vec{B}$ قرار گرفته که عمود بر صفحه شکل و رو به داخل است. بزرگی میدان با $B = 4t^2x^2$ داده شده است که B برحسب T و x برحسب متر و t ثانیه است. چنانچه حلقه برابر با $w = 3m$ و بلندی آن $h = 2m$ است.
بزرگی و جهت emf القایی در $t = 0.1s$ ؟



$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$\theta = 0^\circ$ or 180° → بزرگی شار Φ_B مهم است.

$$\rightarrow \Phi_B = \int 4t^2x^2 (h\,dx) = 4t^2h \int_0^w x^2 dx$$

$$= 4t^2h \frac{w^3}{3} = 4t^2 \cdot 2 \frac{3^3}{3} = 72t^2 \qquad \varepsilon_{ind} = \frac{d\Phi_B}{dt} = 72 \cdot 2t = 144t \rightarrow \varepsilon_{ind}(0.1) = 14.4V$$

حال در این مثال: (A) میدان مغناطیسی در همه‌ی فضا وجود داشته باشد و حلقه را با سرعت v به سمت راست ببریم، Φ_B چقدر است؟

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = 4t^2h \int_{vt}^{w+vt} x^2 dx$$

(B) اگر خارج حلقه میدان صفر باشد و حلقه را با سرعت v به سمت راست حرکت دهیم، Φ_B چقدر است؟

$$\Phi_B = 4t^2h \int_{vt}^{w} x^2 dx \longrightarrow 0 < vt < w$$

اگر $vt \geq w$ ، $B = 0$ پس $\Phi_B = 0$

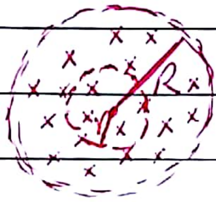
AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ ← برای ذرات ساکن (اگر مسیری را طی کنیم و به همان اولیه بازگردیم، حاصل این انتگرال صفر است.)

اگر تغییرات شار مغناطیسی داشته باشیم، حاصل این انتگرال صفر نخواهد بود.

مثال:



نکته: میدان الکتریکی در راستای مماس بر شعاع ← دلیل: درون جسم بار الکتریکی وجود ندارد پس

سمتِ صفر بودن

طبق گاوس تو کدام اثبات می‌شود که E مخالف صفر باید باشد

میدان الکتریکی در راستای مماس بر شعاع و $E(r)$

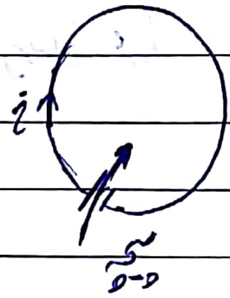
$$\mathcal{E} = \frac{d\phi_B}{dt} \longrightarrow \oint_{\text{دایره‌ای به شعاع } r} \vec{E}_{ind}\cdot d\vec{l} = \frac{d\phi_B}{dt} \longrightarrow E(r)\int dl = \frac{d\phi_B}{dt} \Rightarrow$$

$$E(r) = \frac{1}{2\pi r}\frac{d\phi_B}{dt} = \frac{1}{2\pi r}\times \pi r^2 \cdot \frac{dB}{dt} = \frac{r}{2}\cdot\frac{dB}{dt}$$

و $\phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{s} \longrightarrow \frac{d\phi_B}{dt} = \frac{dBS}{dt} = S\left(\frac{dB}{dt}\right)$

$$E_{in}(r) = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt} \;;\; r<R$$

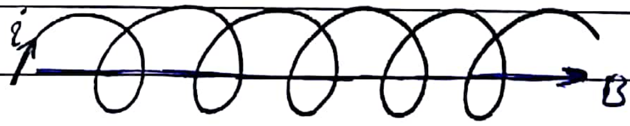
$$E_{out}(r) = \frac{1}{2\pi r}\times \pi R^2 \frac{dB}{dt} = \frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt} \;;\; r>R$$



$i \updownarrow \longrightarrow B \updownarrow \longrightarrow \phi_B \updownarrow \longrightarrow \mathcal{E}_{ind}$

خود القایی

سیم لوله:



L, N, R

Subject:
Year: Month: Day:

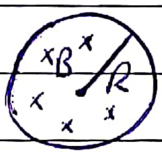
$$\mathcal{E}_{ind} = \frac{N\,d\Phi_B}{dt} = \frac{d(N\Phi_B)}{dt}$$

تعریف ضریب خودالقایی: $L = \frac{N\Phi_B}{i} \longrightarrow N\Phi_B = Li \longrightarrow$ ثابت L

$$\longrightarrow \mathcal{E}_{ind} = \frac{d(Li(t))}{dt} = \frac{L\,d(i)}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

به ساختار هندسی و جنس هسته بستگی دارد.

نکات از قاعده به سیم لوله



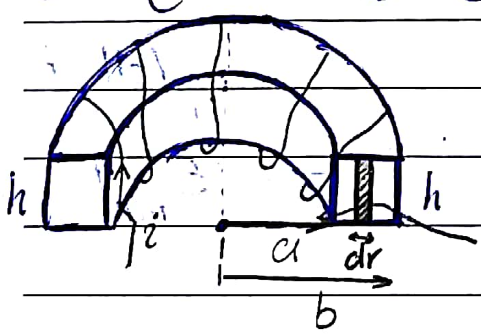
$B = \mu_0 n i$, $n = \frac{N}{L}$ $\qquad \Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{s} = B\int ds$

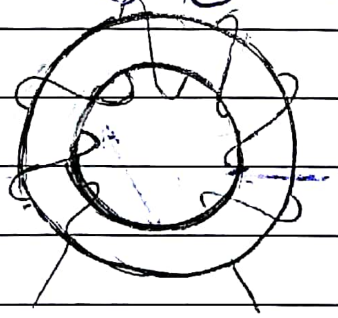
$= B\pi R^2 \qquad L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{N(B\pi R^2)}{i} = \frac{N\mu_0(\frac{N}{\ell})\,i\pi R^2}{i}$

$$= \mu_0 \frac{N^2}{L}\pi R^2$$

مثال: ضریب خودالقایی یک چنبره با شعاع داخلی a و شعاع بیرونی b و سطح مقطع مستطیلی

شکل با ارتفاع h.





$$\mathcal{E} = L\frac{di}{dt}$$

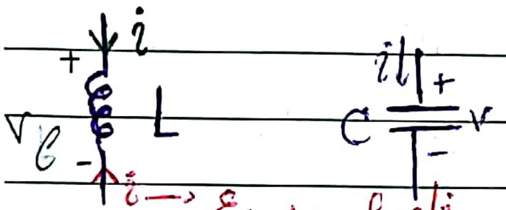
AIDIN $L = \frac{N\Phi_B}{i}$ و $\Phi_B = \int \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}\underbrace{ds}_{h\,dr} = \int_a^b \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} h\,dr$

Subject:
Year: Month: Day:

$$= \frac{\mu_0 N i h}{2\pi} \ln r \Big|_a^b = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \longrightarrow$$

$$L = \frac{N \frac{\mu_0 N i h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{i} = \frac{\mu_0 N^2 h \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2\pi}$$

مدل مدار القاگر با الف:



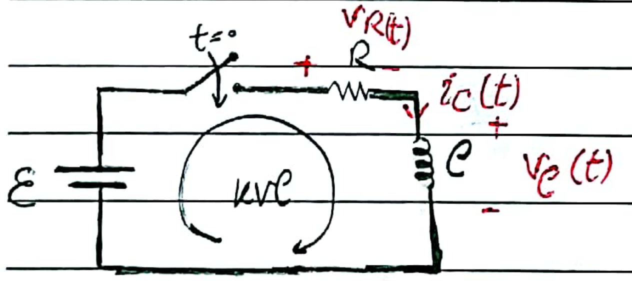
$$C = \frac{q}{V}$$

$$\mathcal{E}_{ind} = -L\frac{di}{dt}$$

$$i = C\frac{dv_C}{dt}$$

القاگر قصد دارد جریان در خلاف جهت جریان i دارد $\longrightarrow v_L > 0 ,\ \frac{di}{dt} > 0 \longrightarrow v_L = +L\frac{di}{dt}$

مدار اولیه	C	R	i	V	$\longrightarrow$ مدار خازنی
تبدیل به	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
مدار ثانویه	L	$\frac{1}{R}$	V	i	$\longrightarrow$ مدار سلفی



KVL: $\mathcal{E} = v_R(t) + v_L(t) = R i_L(t) + L\frac{di_L(t)}{dt}$ (I) $\longrightarrow$

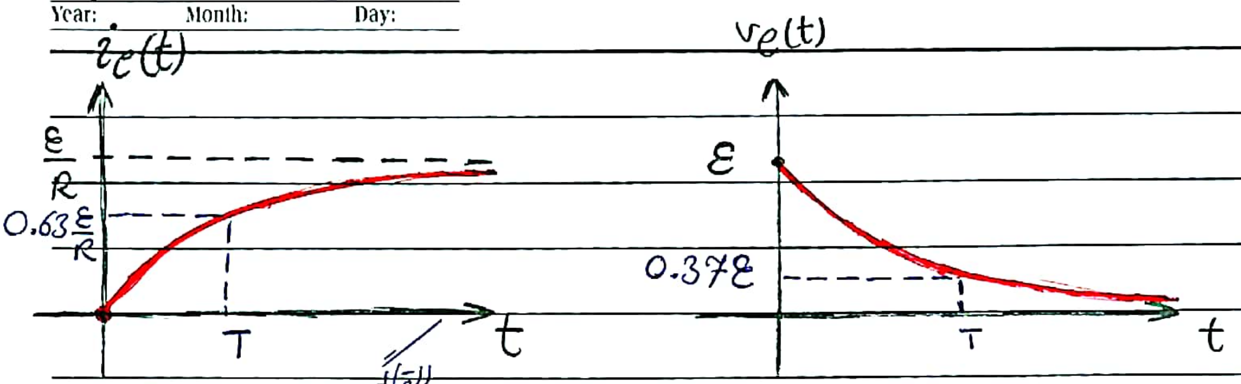
$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_L(t) = \frac{\mathcal{E}}{L} \longrightarrow i_L(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \\ i_L(t=0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{حل}} i_L(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right)$$

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = L \cdot \frac{\mathcal{E}}{R} \times \frac{1}{\frac{L}{R}} e^{-\frac{t}{\frac{L}{R}}} = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{\frac{L}{R}}}$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:



$t=0 \longrightarrow e$ القاگر: مدار باز

$t \longrightarrow \infty$ القاگر $e \longrightarrow$ اتصال کوتاه

دو طرف رابطه‌ی معادله‌ی مدار (I) را در جریان $i_e(t)$ ضرب می‌کنیم

$$\underbrace{\mathcal{E}\, i_e(t)}_{\text{توان تحویلی باتری به مدار}} = [v_R(t) + v_e(t)]\, i_e(t) = \underbrace{R\, i_e^2(t)}_{\text{توان خروجی از مدار توسط مقاومت}} + \underbrace{e\, i_e(t)\frac{di_e(t)}{dt}}_{\text{توان ذخیره شده در میدان مغناطیسی}}$$

توان ذخیره شده در میدان مغناطیسی: $\dfrac{dU_B}{dt} = e\, i_e(t)\dfrac{di_e(t)}{dt} \longrightarrow$

$$\int dU_B(t) = \int_0^{i_e(t)} e\, i_e(t)\, di_e(t) \longrightarrow \boxed{U_B(t) = \frac{1}{2} e\, i_e^2(t)}$$

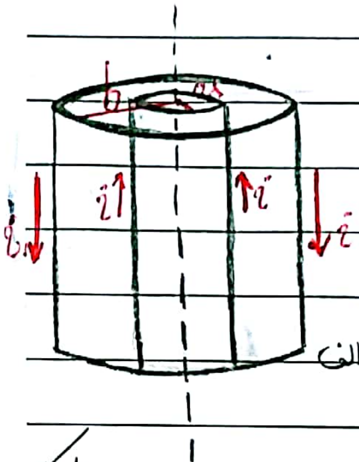
چگالی انرژی در واحد حجم: $u_B = \dfrac{U_B}{V} = \dfrac{\frac{1}{2} e\, i_e^2(t)}{A\,L} = \dfrac{1}{2}\mu_0 n^2 i_e^2(t) =$ (برای یک سیم‌لوله، $e = \mu_0 n^2 LA$)

$$\frac{1}{2\mu_0}\frac{\mu_0^2 n^2 i_e^2(t)}{1} = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: برای یک کابل هم محور دراز شامل دو استوانه هم محور به شعاع های a و b داریم. در استوانه داخلی حامل جریان i و در استوانه بیرونی i- است.



الف) انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی به طول ℓ از کابل را حساب کنید.

ب) القاییدگی طول L از این کابل چقدر است؟

الف) $U_B = ?$ $\quad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$

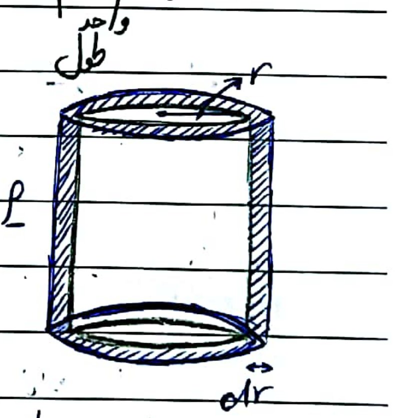
مسیر دایره‌ای در نظر میگیریم : $r<a:$ $\oint B \cdot d\ell = \mu_0 i \xrightarrow{i=0} B=0$ و $U_B = 0$

$a<r<b:$ $B \cdot 2\pi r = \mu_0 i \longrightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ (I)

$b<r:$ $B \cdot 2\pi r = \mu_0 \times 0 \xrightarrow{i=0} B=0$ و $U_B = 0$

$\xrightarrow{I} B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \longrightarrow u_B = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{i^2}{4\pi^2 r^2}$ $\quad U_B \Big|_{\text{واحد طول}} = \int u_B \, dv =$

$$\int_a^b \frac{1}{8\pi^2 r^2}\mu_0 i^2 \cdot 2\pi r \ell \, dr = \frac{L\mu_0 i^2}{4\pi}\ln(b/a)$$



$dv = S\,dr = 2\pi r \ell \, dr$

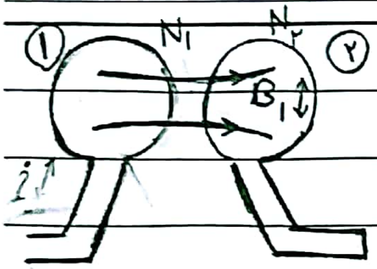
ب) $U_B \Big|_{\text{در طول } L} = \frac{1}{2} \ell i^2 \longrightarrow$

$$\ell = \frac{2U_B}{i^2} = \frac{L\mu_0}{2\pi}\ln(b/a)$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

القای متقابل:



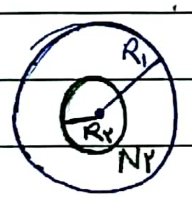
$$\mathcal{E}_{ind} = \frac{N_2 \overbrace{\Phi_{21}}^{\oint_{S_2} B_1 \cdot ds}}{dt}$$

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} \longrightarrow \mathcal{E}_{ind\,2} = \frac{dM_{21}}{dt} i_1 = M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

$$M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2} \longrightarrow \mathcal{E}_{ind\,1} = \frac{dM_{12}}{dt} i_2 = M_{12}\frac{di_2}{dt}$$

$$M_{12} = M_{21} = M$$ ضریب القای متقابل

مثال:



$R_2 \ll R_1$

$$M = ?$$

$$M = M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2}$$

$$M = M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}$$ ✓

نکته: ما جای بی میدان در مرکز پیچه را میدانیم (وجود). پس از i_1 استفاده می کنیم تا با فرض $R_2 \ll R_1$ بتوانیم حلقه داخلی را در مرکز پیچه در نظر بگیریم.

$$i_1 \longrightarrow B_1 \Big|_{\text{در مرکز}} = \frac{N_1 \mu_0 i_1}{2R_1} \longrightarrow \Phi_{21} = \oint_{S_2} \vec{B_1} \cdot \vec{ds} =$$

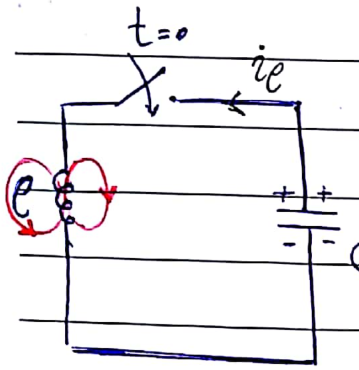
$$\int \frac{N_1 \mu_0 i_1}{2R_1} \cdot ds = \frac{N_1 \mu_0 i_1}{2R} (\pi R_2^2)$$

$$M = M_{21} = \frac{N_2 N_1 \mu_0 \pi R_2^2}{2R_1}$$

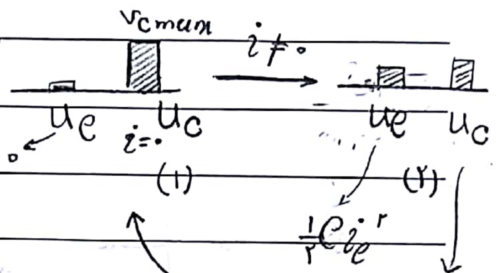
AIDIN

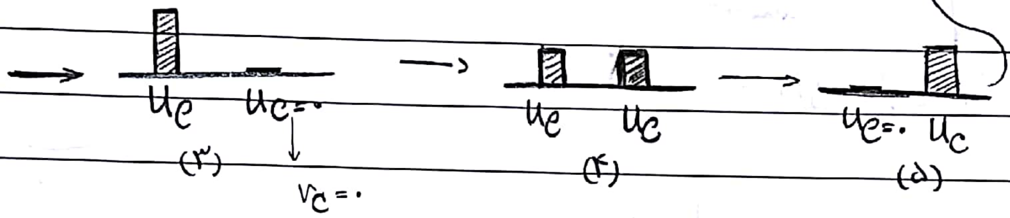
Subject:
Year: Month: Day:

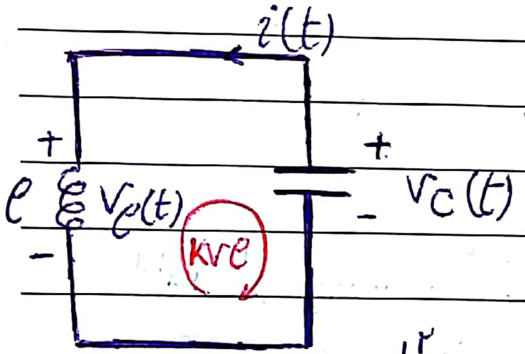
نوسانات الکترومغناطیسی و جریان‌های متناوب:



$$\begin{cases} v_C(t=0)=V_m \\ i_L(t=0)=0 \end{cases}$$







KVL: $v_L = v_C$ $\quad L\frac{di_L(t)}{dt} \longrightarrow -C\frac{dv_C(t)}{dt}$

$$-LC\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}=v_C(t)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} LC\dfrac{d^2v_C(t)}{dt^2}+v_C(t)=0 \\ v_C(0)=V_m \\ \left.\dfrac{dv_C(t)}{dt}\right|_{t=0}=0 \end{cases} \longrightarrow LCs^2+1=0 \longrightarrow$$

$$s=\pm i\frac{1}{\sqrt{LC}} \longrightarrow$$

$$v_C(t)=\underbrace{A}_{V_m}\cos(\underbrace{\omega}_{\frac{1}{\sqrt{LC}}} t) \longrightarrow i(t)=-CV_m\omega\underbrace{(-\sin\omega t)}_{\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})}$$

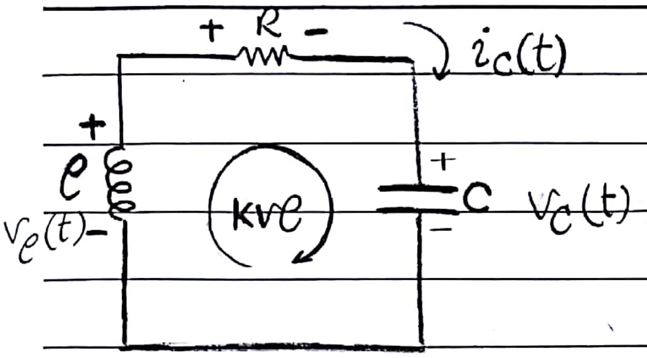
$$\frac{di}{dt}(\max)=?$$

AIDIN

۷۸

Subject:
Year: Month: Day:

: RLC



$$\frac{c\,dv_c}{dt}$$

KVL: $v_L = v_R + v_C \rightarrow$

$Ri_C(t)$, $-L\dfrac{di_c}{dt}$, $\dfrac{c\,dv_c}{dt}$

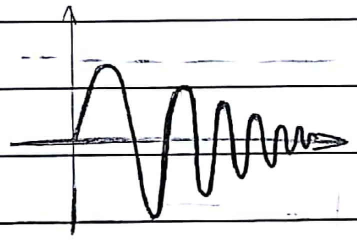
$$\begin{cases} +LC\dfrac{d^{2}v_C(t)}{dt^{2}} + RC\dfrac{dv_C(t)}{dt} + v_C = 0 \rightarrow \dfrac{d^{2}v_C(t)}{dt} + \underbrace{\dfrac{RC}{LC}}_{2\alpha}\dfrac{dv_C(t)}{dt} + \underbrace{\dfrac{1}{LC}}_{\omega_0^{2}}v_C = 0 \rightarrow S^{2}+2\alpha S+\omega_0^{2}=0 \\ v_C(t=0)=V_m \\ \left.\dfrac{dv_C(t)}{dt}\right|_{t=0}=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow S = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^{2}-\omega_0^{2}}$

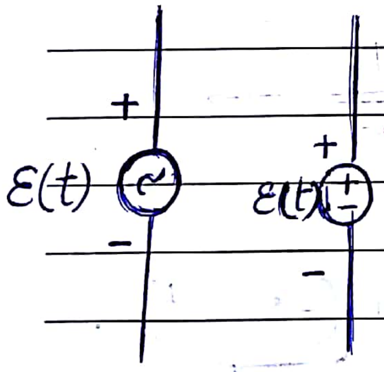
حالت خاص: if $\Rightarrow \omega_0^{2} > \alpha^{2} \longrightarrow$

$$v_C(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t)$$

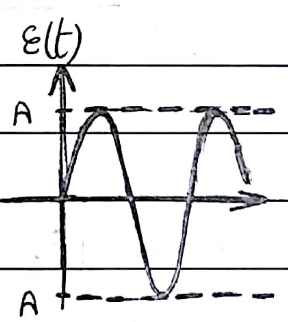
$A = V_m$, $\alpha = \dfrac{R}{2L}$, $\omega = \sqrt{\alpha^{2}-\omega_0^{2}}$

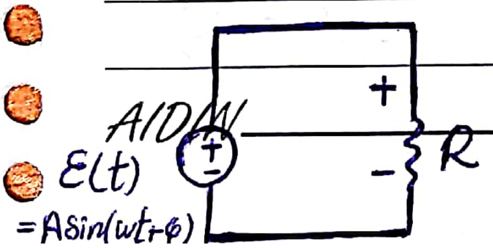


نوسانات واداشته ← نوسانات الکترومغناطیسی



$$\mathcal{E}(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$$



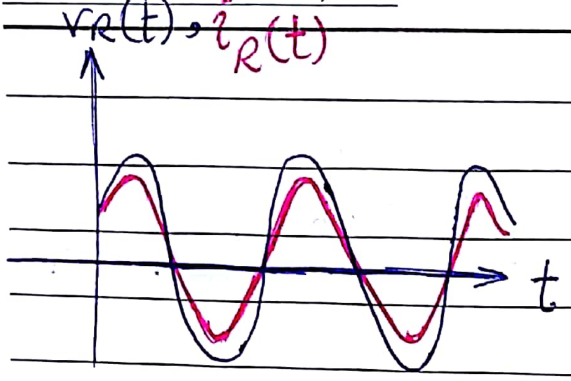


با مقاومت:

$$v_R = \overbrace{A}^{V_m}\sin(\omega t+\varphi)$$

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{A}{R}\sin(\omega t+\varphi) = I_m\sin(\omega t+\varphi)$$

Subject:
Year: Month: Day:



$$\frac{V_m}{I_m} = R$$

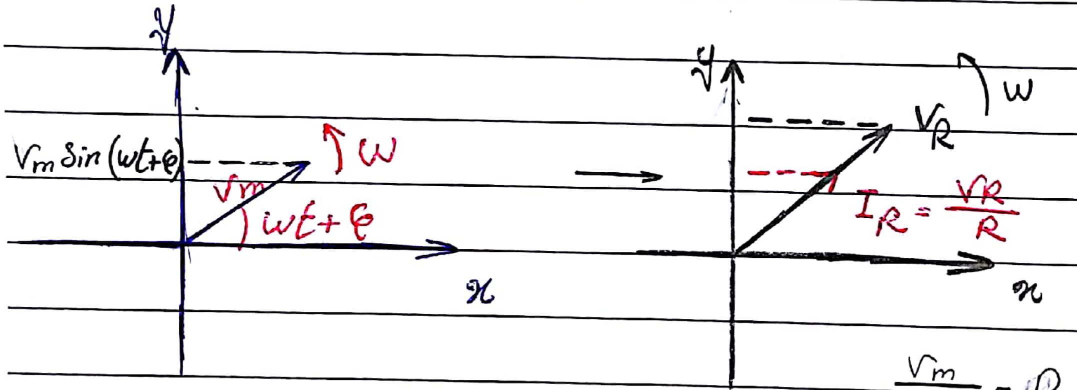
نمایش فازوری یک تابع سینوسی:

۱) تعریف یک بردار در فضای مختلط

$$v_R(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$$

۲) اندازه‌ی بردار برابر با دامنه‌ی تابع سینوسی

۳) زاویه‌ای که بردار در هر لحظه از زمان با محور xها می‌سازد برابر با زاویه داخل تابع سینوسی در آن لحظه از زمان است.



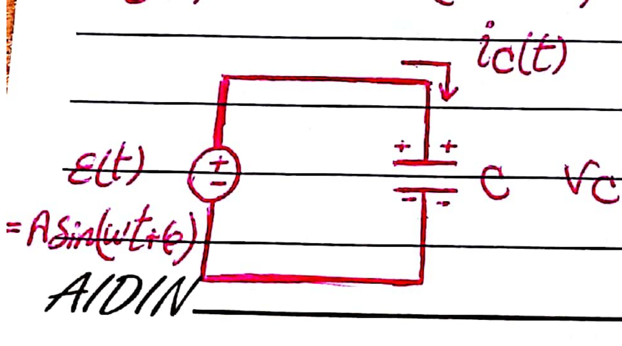
$V_R = V_m \angle \varphi$

$I_R = I_m \angle \varphi$

$$\frac{V_m}{I_m} = R$$

بار خازنی:

$$v_C(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi)$$



$v_C(t) = V_m \sin(\omega_d t + \varphi) \longrightarrow$

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} = C V_m \omega_d \cos(\omega_d t + \varphi) = C V_m \omega_d \sin\left(\omega_d t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Scanned by CamScanner

Subject:
Year: Month: Day:

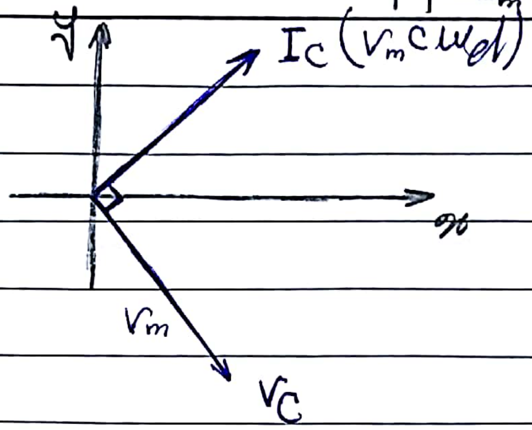
در بار خازن

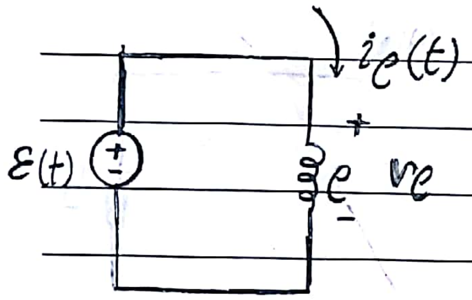
$$\begin{cases} v = v_m \angle \varphi_0 \\ I = v_m (C\omega_d) \angle \varphi_0 + \pi/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = I_m C \omega_d \angle \theta_0 - \pi/2 \\ I = I_m \angle \theta_0 \end{cases}$$

$$\frac{v_m}{I_m} = \frac{1}{C\omega_d} = X_C \;,\quad \theta - \varphi = \pi/2$$

دامنه ولتاژ / دامنه جریان = مقاومت ظاهری خازن در مقابل تحریک سینوسی

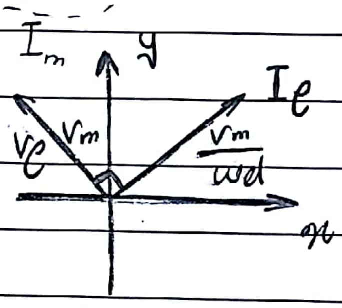




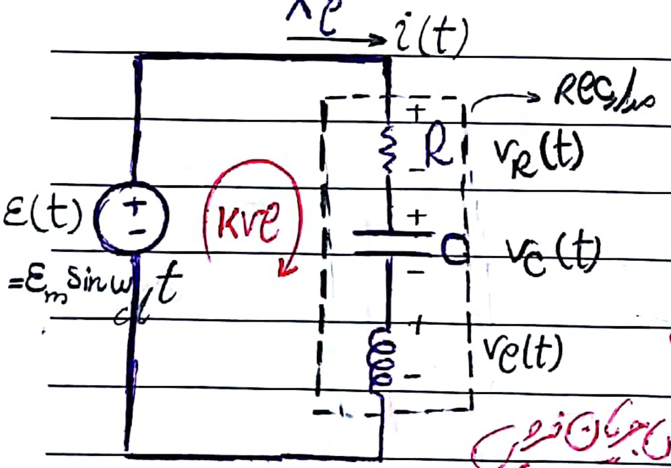
بار القائی: $v_L(t) = v_m \sin(\omega_d t + \varphi)$

$$i_L(t) = \frac{1}{L}\int v_L(t) = \frac{1}{L}\frac{v_m}{\omega_d}\left(-\cos(\omega_d t + \varphi)\right)$$

$$\begin{cases} v_L = V_m \angle \varphi \\ I_L = I_m \angle \varphi \end{cases} \;,\quad \begin{cases} \dfrac{v_m}{I_m} = L\omega_d = X_L \\ \theta - \varphi = -\pi/2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} v = v_m \angle \varphi_0 \\ I = \dfrac{v_m}{X_L} \angle \varphi_0 - \pi/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v = I_m X_L \angle \theta_0 + \pi/2 \\ I = I_m \angle \theta_0 \end{cases}$$



مدار RLC سری:

KVL: $\varepsilon(t) = v_R(t) + v_C(t) + v_L(t)$ (I)

$\varepsilon_m \sin \omega_d t$

فرض جریان فرضی ، داریم برابر این شکل : $i(t) = I_m \sin(\omega_d t - \varphi)$ (II)

? ?

AIDIN

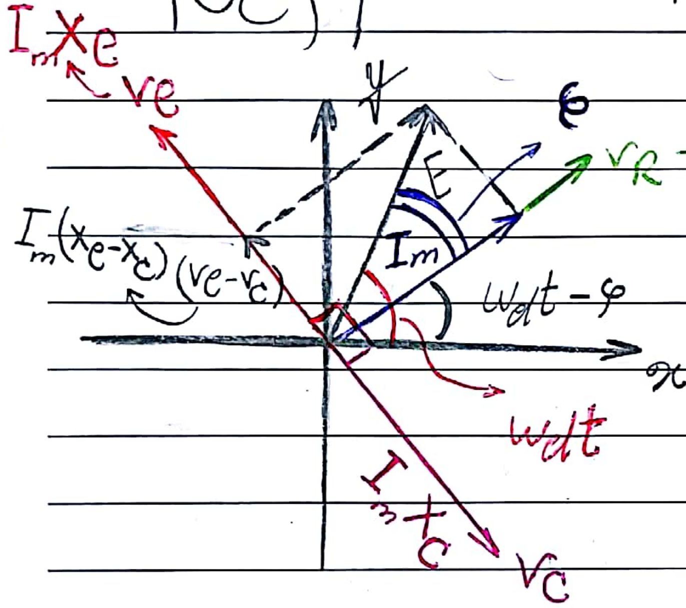
Subject:
Year: Month: Day:

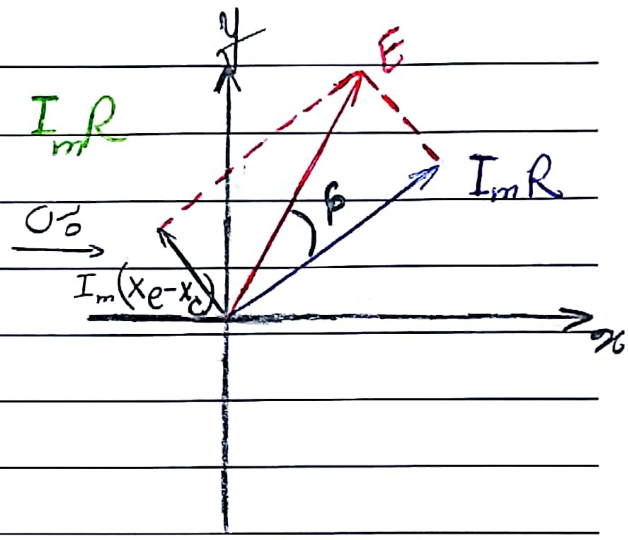
جایگذاری I در II :

$$\mathcal{E}_m \sin(\omega_d t) = R I_m \sin(\omega_d t - \varphi) + I_m \times X_C$$

$$\sin\left(\omega_d t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + I_m \times X_e \sin\left(\omega_d t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

استفاده از تصویر فازورها به اینصورت ابتدا خود فازورها را رسم کرده پس تصویر آنها را نیز رسم و باهم جمع می کنیم.





$$\begin{cases} \varphi = tg^{-1}\left(\dfrac{x_e - x_c}{R}\right) \\ I_m^2 R^2 + (x_e - x_c)^2 I_m^2 = \mathcal{E}_m^2 \end{cases} \longrightarrow I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{(x_e - x_c)^2 + R^2}}$$

نوسانات واداشته:

$$I = I_m \sin(\omega_d t + \varphi_0 - \varphi)$$

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{(x_e - x_c)^2 + R^2}} \quad , \quad \varphi = tg^{-1}\left(\frac{x_e - x_c}{R}\right)$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

حال به بررسی حالات مختلف توسط روابط نوسانات واداشته می‌پردازیم: برای $I = I_m \sin(\omega_d t - \varphi)$ و $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m \sin \omega_d t$

۱) یک خازن: C ; $I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{X_C^2}}$, $\varphi = tg^{-1}\frac{-X_C}{0} = -\frac{\pi}{2}$

۲) یک القاگر: L ; $I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{X_L}$, $\varphi = tg^{-1}\left(\frac{X_L}{0}\right) = +\frac{\pi}{2}$

۳) یک مقاومت: R ; $I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R}$, $\varphi = tg^{-1}\left(\frac{0}{R}\right) = 0$

۴) یک خازن و مقاومت سری: R C ; $I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{X_C^2 + R^2}}$, $\varphi = tg^{-1}\left(\frac{-X_C}{R}\right)$

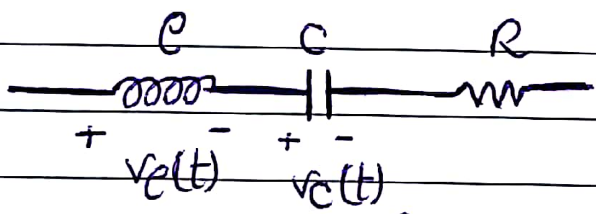
۵) " القاگر و " " : R L ; $I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{\sqrt{X_L^2 + R^2}}$, $\varphi = tg^{-1}\left(\frac{X_L}{R}\right)$

۶) " " و خازن " : C L ; $I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{|X_L - X_C|}$, $\varphi = tg^{-1}\left(\frac{X_L - X_C}{0}\right)$

همچون یک رفتار در مدار : خاصیت القایی ← $\frac{\pi}{2}$, $X_L > X_C$

اتصال کوتاه ← 0 , $X_L = X_C$

" " خازن " " : خاصیت خازنی ← $-\frac{\pi}{2}$, $X_L < X_C$



if $X_L = X_C$ → مدار در حالت تشدید → I

مدار مقاومتی با مقدار مقاومت R : فقط خاصیت مقاومتی ← $v_L(t) + v_C(t) = 0$

$\xrightarrow{I} X_L = X_C \to L\omega_d = \frac{1}{C\omega_d}$, $\omega_d^2 = \frac{1}{LC} \to \omega_d = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

AIDIN

۸۳

Subject:
Year: Month: Day:

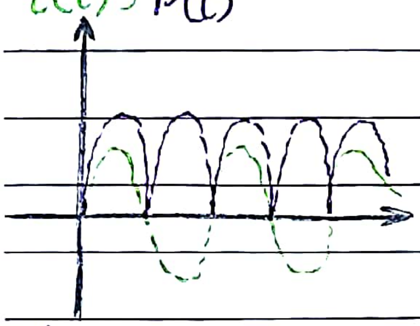
توان در جریان‌های متناوب:

R

$P(t) = R\, i_e^2(t)$

توان مصرفی در مدار RLC فقط مربوط به مقاومت است

$i(t), p(t) \qquad I_m^2 \sin^2(\omega_e t - \varphi)$



$$P_{avg} = \frac{\int_T p(t)\,dt}{T} = \frac{\int_T R I_m^2 \sin^2(\omega_e t - \varphi)\,dt}{T} = \frac{R I_m^2}{T}\int_T \frac{1}{2}\left(1-\cos 2(\omega_e t-\varphi)\right)dt$$

$$= \frac{R I_m^2}{T}\left[\frac{1}{2}T\right] = R\,\frac{I_m^2}{2} \qquad I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

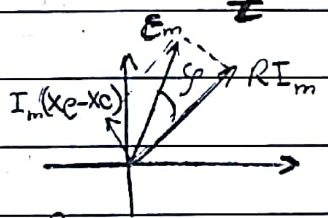
$$\boxed{P_{avg} = R\, I_{rms}^2} \longrightarrow \text{توان مصرفی مدار RLC}$$

$Z = \sqrt{(X_L - X_C)^2 + R^2}$ مقاومت ظاهری مدار RLC

$$\rightarrow P_{avg} = R\, I_{rms} \cdot I_{rms} = R\, I_{rms} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} \rightarrow I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z}$$

$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon_{rms} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{2}}$

$$\rightarrow P_{avg} = \frac{R}{Z}\, I_{rms}\, \varepsilon_{rms} \qquad \frac{R}{Z} = \cos\varphi$$



$$\varepsilon_m = \sqrt{(X_L - X_C)^2 I_m^2 + R^2 I_m^2} \qquad \cos\varphi = \frac{R I_m}{\varepsilon_m} = \frac{R}{\sqrt{(X_L-X_C)^2 + R^2}} = \frac{R}{Z}$$

AIDIN

$$\rightarrow P_{avg} = I_{rms}\, \varepsilon_{rms} \cos\varphi \rightarrow \text{ضریب توان}$$