بسم الله الرحمن الرحیم   فیزیک ۲   استاد سمیه مجدل

Subject:
Year: Month: Day:

۱/

میدان الکتریکی متغیر با زمان تشکیل میدان مغناطیسی می‌دهد و بالعکس.

الکتریسیته | اورستد ← الکترومغناطیس
مغناطیس |

فاراداى : توصیف کیفی
ماکسول : قوانین الکترومغناطیس

کشف ماهیت الکترومغناطیس
نور

۴ قانون کلی
↕
قوانین نیوتون

فصل ۲۱ - بار الکتریکی

بار الکتریکی خاصیت است. بنیامین فرانکلین نامگذاری بارهای الکتریکی به صورت + و - را انجام داده.

کولن اولین شخصی است که یک رابطه برای بار الکتریکی ارائه داد.

واحد بار الکتریکی (C) : مقدار باری که در واحد زمان از مقطع یک سیم حامل جریان A ۱ عبور می‌کند.

A.S

$1C = 6.24 \times 10^{18}$ (بار یک پروتون)

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

q_1 —— r —— q_2

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

$K = 8.99 \times 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2}$

AIDIN

۲

Subject:
Year: Month: Day:

ضریب گذردهی خلأ $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \ \frac{C^2}{N.m^2} \rightarrow$ خلأ

Permitivity

$K = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}$ خلأ

اگر محیط خلأ نباشد:

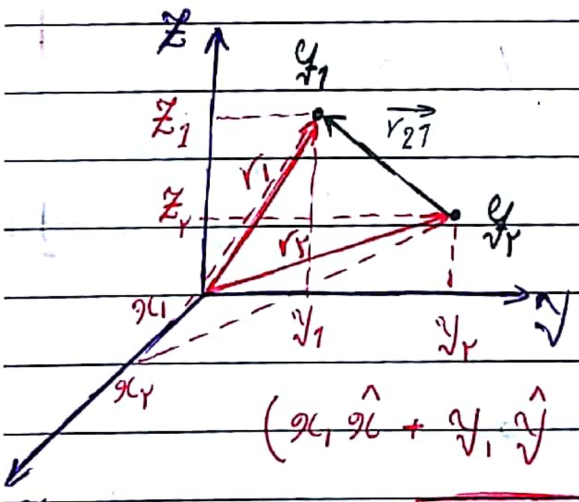
ضریب گذردهی محیط $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$

$|F| = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{r^2}$ $\quad q_1 \leftarrow \hat{r}_{21} \quad \vec{r}_{21} \quad q_2$

$\vec{F}_{21} \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|r_{21}|^2} \hat{r}_{21} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|r_{21}|^3} \vec{r}_{21} \end{cases}$

اگر q ها هم علامت باشند $\vec{F}_{21}$ هم جهت با $\hat{r}_{21}$ خواهد بود.

قانون کولن در مختصات کارتزین:



$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 |r_{21}|^3} r_{21}$

$\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 =$

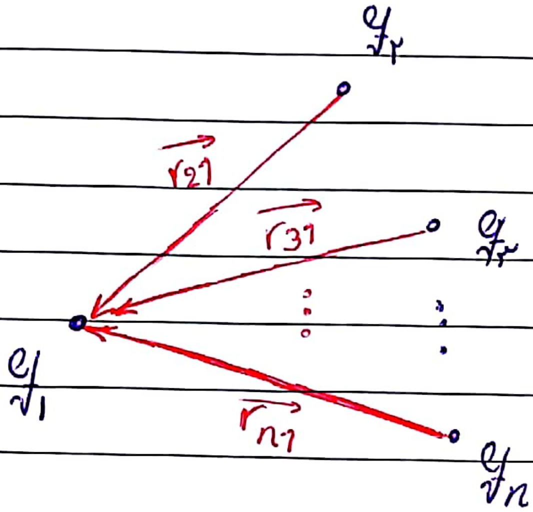
$(x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k}) - (x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k})$

$|\vec{r}_{21}| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

AIDIN

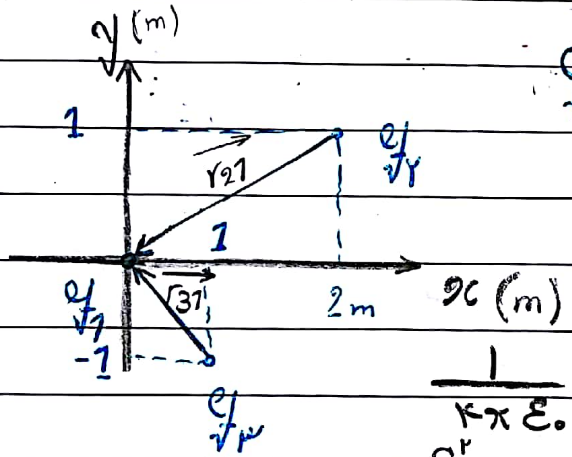
Subject:
Year: Month: Day:

محاسبهٔ نیروی الکتریکی ناشی از بارهای نقطه‌ای گسسته:



$$\vec{F_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 \left[\frac{q_2}{|\vec{r_{21}}|^3}\vec{r_{21}} + \frac{q_3}{|\vec{r_{31}}|^3}\vec{r_{31}} + \cdots + \frac{q_n}{|\vec{r_{n1}}|^3}\vec{r_{n1}} \right]$$

مثال: $q_1 = 1^C$ $q_2 = 2^C$ $q_3 = -1^C$



$$\vec{f_1} = \vec{f_{21}} + \vec{f_{31}} =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{(2^2+1^2)}(-2\hat{x} - \hat{y}) +$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_3}{(1^2+1^2)}(-\hat{x} + \hat{y}) \rightarrow \vec{f_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)\hat{x}\right.$$

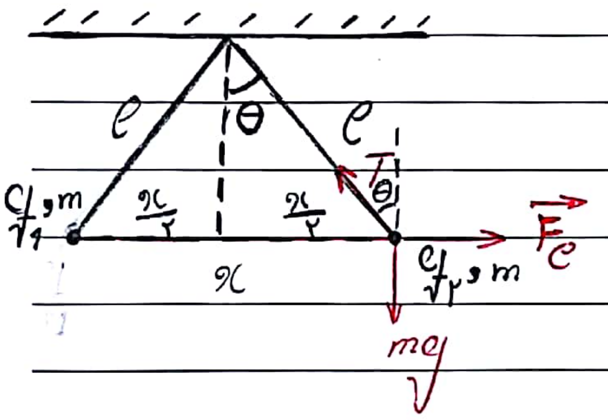
$$\left. + \left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\right)\hat{y}\right] = \frac{1}{4\times 3.14\,\varepsilon_0}\left[-\frac{3}{10}\hat{x} + \frac{1}{10}\hat{y}\right]$$

$$= \frac{1}{12.56\,\varepsilon_0}\left[-0.3\hat{x} + 0.1\hat{y}\right]$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

مثال: ۲ گلوله مشابه و هم علامت و جرم به اندازه‌ی یکسان باردار شده اند.



$$T \begin{cases} T_x = T\sin\theta \\ T_y = T\cos\theta \end{cases}$$

$$\sum \vec{F} = 0 \begin{cases} \sum \vec{F_H} = 0 & T\sin\theta = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} \\ \sum \vec{F_V} = 0 & T\cos\theta = mg \end{cases}$$

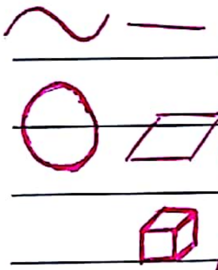
$$\div \quad tg\theta = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mg x^2}$$

$$\sin\theta = \frac{x/2}{l}$$

فرض کنید θ خیلی کوچک باشد : $\theta \approx \sin\theta \approx tg\theta$ $\rightarrow$ $\dfrac{\frac{x}{2}}{l} = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mg x^2}$

$$\rightarrow x = \left(\frac{q^2 l}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}$$

توزیع بار الکتریکی ناشی از توزیع بارهای پیوسته



۱- خطی
۲- سطحی
۳- حجمی

هرجایی که بار به صورت پیوسته باشد به چگالی نیاز داریم: λ ، σ ، ρ

چگالی خطی (C/m)

چگالی سطحی (C/m^2)

چگالی حجمی (C/m^3)

در این مسائل جرم پیوسته را به تعداد زیادی نقاط تبدیل می کنیم تا بتوان از

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

روابط کولن برو بزو

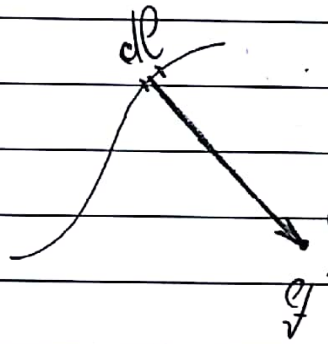
المان گیری:

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

۱- خطی ها $\quad dl \quad \rightarrow \quad dq = \lambda\, dl$

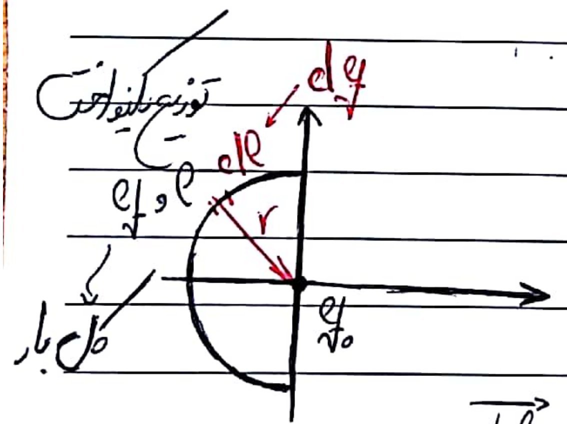
۲- سطحی ها $\quad ds \quad \delta = \frac{dq}{ds} \rightarrow dq = \delta\, ds$

۳- حجمی ها $\quad dv \quad \rho = \frac{dq}{dv} \rightarrow dq = \rho\, dv$



$$\vec{df'} \rightarrow \vec{F}_{q'} = \int \vec{dF}_{q'}$$

مثال:



$$\lambda = \frac{q}{l}$$

ن) اگر λ ثابت نباشد و با توجه به موقعیت مکان تغییرکننده dq نیز تغییر می کند

$$dq = \lambda\, dl$$

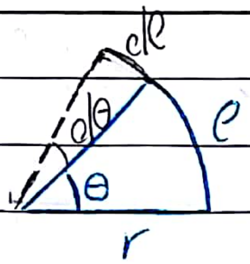
$$\vec{df} = \int \frac{dq \times q_0}{4\pi \varepsilon_0 r^2}\,\hat{r} \rightarrow dq = \lambda\, dl$$

$$\frac{dq\, q_0}{4\pi \varepsilon_0 r^3}\,\vec{r}$$

AIDIN

4

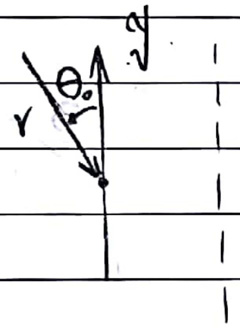
Subject:
Year: Month: Day:



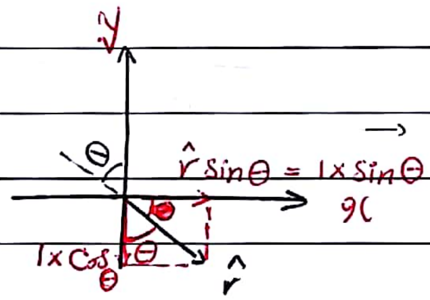
$$\theta = \frac{l}{r} \qquad d\theta = \frac{dl}{r}$$

$$\vec{df} = \begin{cases} \int \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda r d\theta\, q_0}{r^2}\hat{r} \\ \text{'' . ''}\ \dfrac{1}{r^3}\vec{r} \end{cases}$$

$$\vec{f}_{q_0} = \int \vec{df} = \begin{cases} \int \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda r d\theta\, q_0}{r^2}\hat{r} \\ \int \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda r d\theta\, q_0 \vec{r}}{r^3} \end{cases} = \begin{cases} I: \dfrac{\lambda q_0}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{d\theta\, \hat{r}}{r} \\ II: \ \text{''}\ \displaystyle\int \dfrac{d\theta\, \vec{r}}{r^2} \end{cases}$$



I :

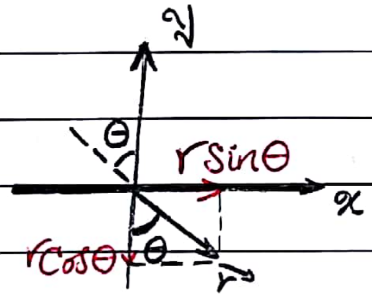


$$\longrightarrow I = \frac{\lambda q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{d\theta}{r}(\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y})$$

$$= \frac{\lambda q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{\pi}(\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y})\,d\theta = \frac{+\lambda q_0}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$\frac{q}{l}$ $\qquad$ $\frac{l}{\pi}$

II :



$$\frac{\lambda q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^{\pi}(r\sin\theta\,\hat{x} - r\cos\theta\,\hat{y})\,d\theta$$

$$= \frac{\lambda q_0 r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\int_0^{\pi}(\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y})\,d\theta = \frac{\lambda q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\times 2 =$$

AIDIN $\dfrac{+\lambda q_0}{2\pi\varepsilon_0 r} \longrightarrow I = II$ برهن

Subject:
Year: Month: Day:

میدان الکتریکی

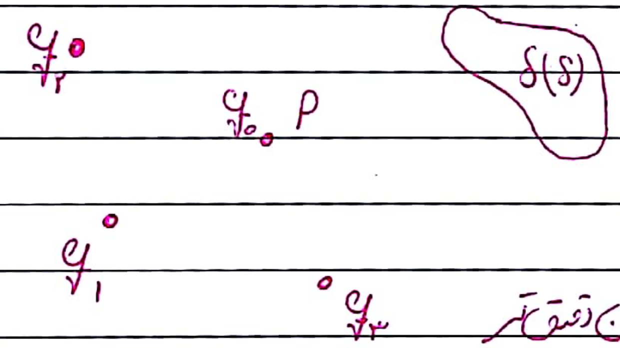
دو دیدگاه برای نیروی بین ۲ بار الکتریکی:
- کنش از دور: بار ↔ بار
- خاصیت میدانی: بار ↔ میدان ↔ بار

دیدگاه اول: اگر q_1 به سرعت در اطراف q_2 جابجا شود، q_2 بدون هیچ وقفه‌ای زمانی تغییر را احساس می‌کند.

دیدگاه دوم: " " به سمت q_2 شتاب گیرد، q_2 با گذشت زمان تغییر را حس می‌کند.

$t = r/c$

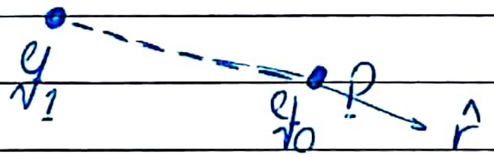
تعریف کمّی میدان:



$$\vec{E} = \vec{F}/q_0 \quad (q_0\vec{E} = \vec{F})$$

بیان دقیق‌تر: $\lim_{q_0 \to 0} \vec{F}/q_0 = \vec{E}$

۱- میدان حاصل از یک بار نقطه‌ای:



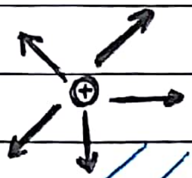
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_{10}}{q_0} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_0}{r^2}\hat{r}}{q_0}$$

→ به طور کلی: $\vec{E}_{\text{نقطه‌ای}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\hat{r}$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

جهت میدان برای بارهای مثبت به سمت خارج بار است.

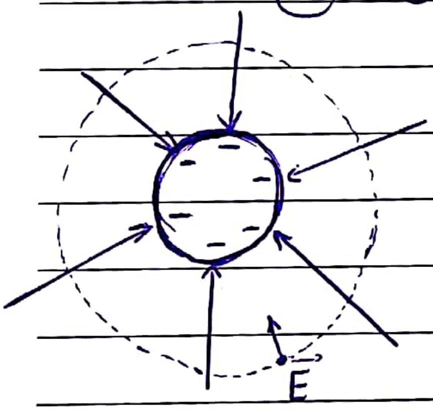


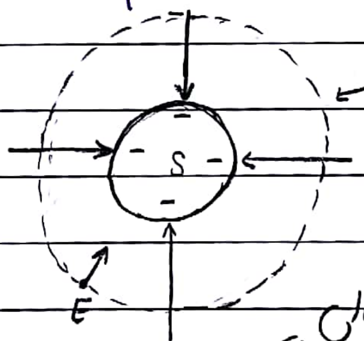
خطوط میدان (فارادی): ابزاری کیفی برای درک اندازه و جهت میدان الکتریکی

دو اصل: (۱) مماس بر هر خط نیرو و هم جهت با آن راستا و جهت میدان بدست می‌آید.

(۲) تعداد خطوط نیرو بر واحد سطح با بزرگی E متناسب است.

تمرین: میدانی به صورت زیر داریم. شدت میدان چه ارتباطی با شعاع دارد؟





S ← تعداد خطوط میدان

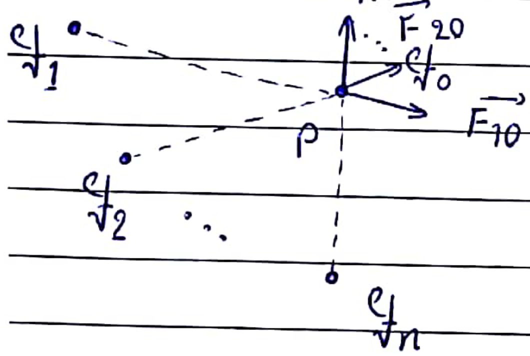
چگالی خطوط میدان $m = \frac{N}{A} = \frac{N}{4\pi r^2}$ کره

N ثابت است

پس $\vec{E} \propto m \propto \frac{1}{r^2}$

Subject:
Year: Month: Day:

۲- میدان ناشی از چندبار نقطه‌ای گسسته :



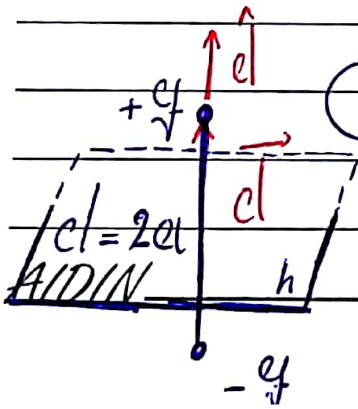
$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \dots + \vec{F}_{n0}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{\vec{F}_{10} + \vec{F}_{20} + \dots + \vec{F}_{n0}}{q_0}$$

$$\rightarrow \vec{E} = \underbrace{\frac{\vec{F}_{10}}{q_0}}_{\vec{E}_1} + \underbrace{\frac{\vec{F}_{20}}{q_0}}_{\vec{E}_2} + \dots + \underbrace{\frac{\vec{F}_{n0}}{q_0}}_{\vec{E}_n} \rightarrow$$

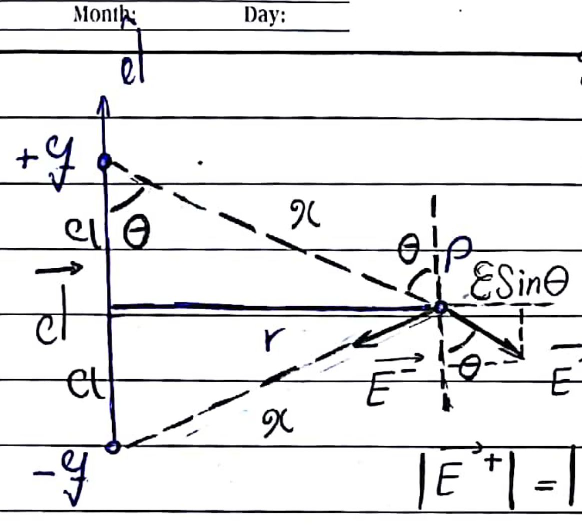
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \frac{q_1}{4\pi \varepsilon_0 r_1^2}\hat{r}_1 + \dots + \frac{q_n}{4\pi \varepsilon_0 r_n^2}\hat{r}_n$$

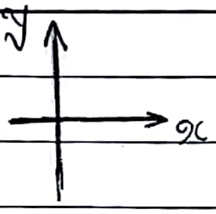
مثال : میدان ناشی از یک دوقطبی الکتریکی :



تعریف گشتاور دوقطبی الکتریکی $\vec{P} = \underbrace{2a}_{l} \cdot q \cdot \hat{l} = q \cdot \vec{l}$

Subject:
Year: Month: Day:





$$\vec{E}^+ \begin{cases} E^+_x = \mathcal{E}\sin\theta \\ E^+_y = -\mathcal{E}\cos\theta \end{cases}$$

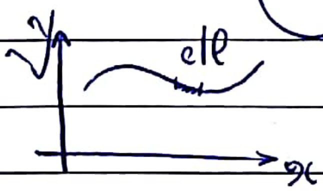
$$|\vec{E}^+| = |\vec{E}^-| = \mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(+q)}{x^2}$$

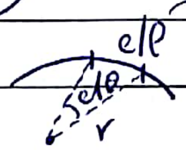
$$\vec{E} = \vec{E}^+ + \vec{E}^- = \left[\cancel{\mathcal{E}\sin\theta\,\hat{x}} - \mathcal{E}\cos\theta\,\hat{y}\right] + \left[\cancel{-\mathcal{E}\sin\theta\,\hat{x}} - \mathcal{E}\cos\theta\,\hat{y}\right]$$

$$= -2\mathcal{E}\cos\theta\,\hat{y} = -2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{+q}{(a^2+r^2)}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+r^2}}\right)\hat{y} =$$

$$\frac{-2aq\,\hat{y}}{4\pi\varepsilon_0\underbrace{(a^2+r^2)^{3/2}}_{\text{if } r\gg a \;\to\; r^3}}$$

۳- میدان الکتریکی ناشی از توزیع بار پیوسته ← خطی ، سطحی ، حجمی



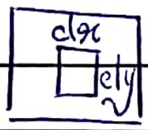


$dl = r\,d\theta$

$dl = dx$

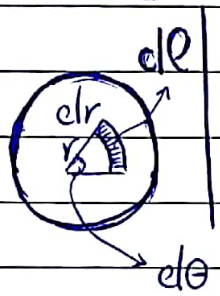
خطی : $dq = \lambda\,dl$

سطح: $dq = \sigma\, ds$ ، ds : $ds = dx\,dy$

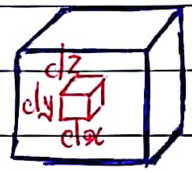


ds, dr, dl

$\underline{dl}$
$r\,d\theta$



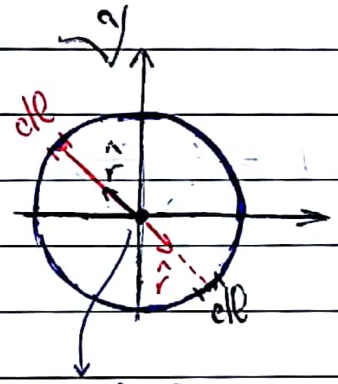
حجم: $dv = \rho\, \underbrace{dx\,dy\,dz}$



مثال: $\lambda\ (C/m)$ ثابت

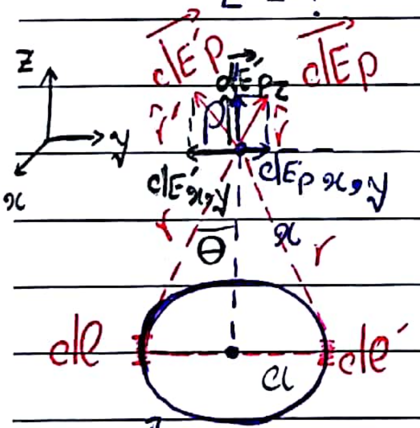
چون چگالی خطی ثابت است و بردارهای یک هم اندازه اما

برخلاف جهت هستند قطعاً E در مبدأ مختصات صفر است.



$\vec{E} = ?$

مثال ۲: بردارهای r حول نقطهٔ P یک مخروط ایجاد می‌کنند



$dq = \lambda\, dl \longrightarrow d\vec{E}_p = \frac{\lambda\, dl}{\underbrace{4\pi\varepsilon_0 r^2}_{\varepsilon}}\hat{r}$

$d\vec{E}_p$ و $d\vec{E}'_p$ را در محور z و y و x تجزیه می‌کنیم.

$(C/m) \Leftarrow \lambda$ ثابت

$d\vec{E}'_p = \frac{\lambda\, dl}{\underbrace{4\pi\varepsilon_0 r^2}_{\varepsilon}}\hat{r}'$

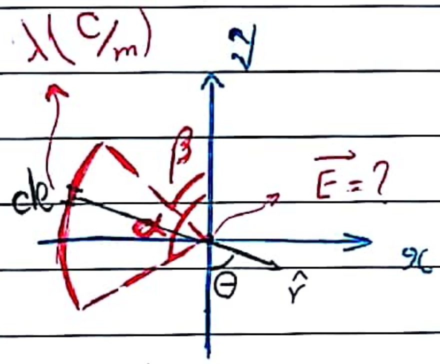
Subject:
Year: Month: Day:

$$\vec{dE_p} = \begin{cases} \mathcal{E}\cos\theta\ \hat{z} \\ \mathcal{E}\sin\theta\,(\hat{R}) \end{cases} \qquad \vec{dE'_p} = \begin{cases} \mathcal{E}\cos\theta\ \hat{z} \\ \mathcal{E}\sin\theta\,(-\hat{R}) \end{cases}$$

$$\vec{dE_p} + \vec{dE'_p} = ۲\,\mathcal{E}\cos\theta\ \hat{z} \longrightarrow \vec{E_p} = \int \vec{dE_z} = \int \mathcal{E}\cos\theta\ \hat{z} =$$

$$\frac{\hat{z}\,\lambda\cos\theta}{۴\pi\varepsilon_0 r^۲}\underbrace{\int dl}_{2\pi a} = \hat{z}\,\lambda\, 2\pi a \frac{x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+a^2)^{3/2}}$$

مثال ۳:



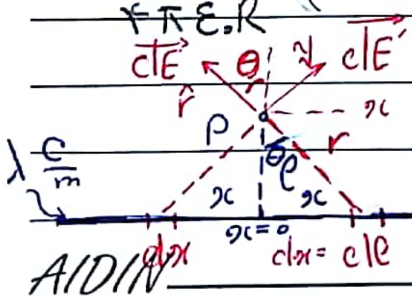
$$dq = \lambda dl \qquad \vec{dE} = \frac{\lambda dl}{۴\pi\varepsilon_0 R^۲}\hat{r}$$

$$\hat{r} \begin{cases} \hat{r}_x = 1\times\sin\theta\ \hat{x} \\ \hat{r}_y = 1\times\cos\theta\ \hat{y} \end{cases}$$

$$\vec{E_T} = \int \vec{dE} = \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_0 R^۲}\int(\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y})\underbrace{dl}_{R d\theta} =$$

$$\frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_0 R}\int_\beta^\alpha (\sin\theta\,\hat{x} - \cos\theta\,\hat{y})\,d\theta = \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_0 R}\left[-\cos\theta\Big|_\beta^\alpha \hat{x} - \sin\theta\Big|_\beta^\alpha \hat{y}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{۴\pi\varepsilon_0 R}\left(-\cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha-\beta)\,\hat{y}\right)$$



$dx = dl \rightarrow dq = \lambda dl$

...

توزیع با رخطی

Subject:
Year: Month: Day:

$$\vec{dE} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dx}{r^2}}_{\mathcal{E}}\hat{r} = \mathcal{E}\cos\theta\,\hat{y} - \mathcal{E}\sin\theta\,\hat{x}$$

با حضور $\vec{dE}$ ، مؤلفه‌ی $\hat{x}$ ها میان خنثی و صفر شود

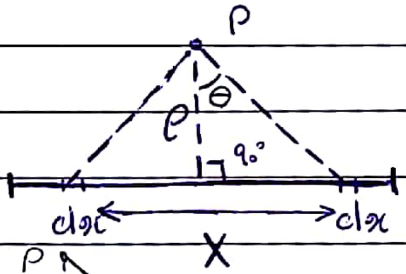
$$\vec{E} = \int \vec{dE_y} = \int \mathcal{E}\cos\theta\,\hat{y} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta\,\hat{y}$$

$$r^2 = x^2 + \ell^2 \qquad x = \ell\, tg\,\theta \to dx = \ell(1+tg^2\theta)d\theta$$

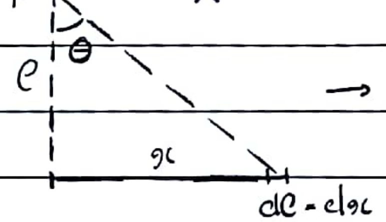
$$\to r^2 = \ell^2 tg^2\theta + \ell^2 = \ell^2(1+tg^2\theta)$$

$$\to \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\lambda\hat{y}\int\frac{dx}{r^2}\cos\theta = \frac{\lambda\hat{y}}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\ell(1+tg^2\theta)\,d\theta}{\ell^2(1+tg^2\theta)}$$

$$= \frac{\lambda\hat{y}}{4\pi\varepsilon_0\ell}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\ell}\hat{y}$$



$$\vec{E} = \frac{\lambda\hat{y}}{4\pi\varepsilon_0\ell}\int_{-tg^{-1}(\frac{X}{2\ell})}^{tg^{-1}(\frac{X}{2\ell})}\cos\theta\,d\theta$$



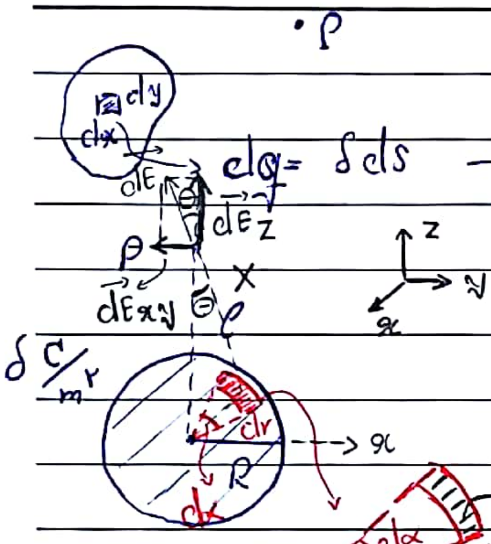
$$\to \vec{E} = \int\vec{dE} = \int dE_x\hat{x} + dE_y\hat{y} =$$

$$\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda dx}{r^2}\cos\theta\,\hat{y} + \text{——}\sin\theta\,\hat{x}$$

که بازه‌ی انتگرال از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند

Subject:
Year: Month: Day:

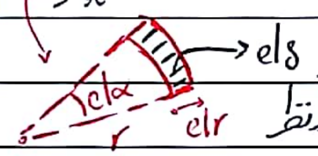
توزیع بار سطحی:



$dq = \delta\, ds \longrightarrow \vec{dE} = ?$

میدان ناشی از دیسک باردار:

فرض δ ثابت استفاده از مختصات قطبی



شبه مستطیل در نظر گرفته می‌شود. $\longrightarrow$ $ds = r\,d\alpha\, dr$

$$\longrightarrow dq = \delta\, r\, dr\, d\alpha \longrightarrow \vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\delta\, r\, d\alpha\, dr}{x^2}\hat{x}$$

ε

بر اساس تقارن $\vec{dE}_{xy}$ ها خنثی می‌شوند.

$$\vec{dE} = \varepsilon \cos\theta\, \hat{z} \longrightarrow \vec{E} = \hat{z}\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\delta\, r\, dr\, d\alpha}{x^2}\cos\theta$$

$x^2 = \rho^2 + r^2 \qquad r = \rho\, tg\theta$

α و r تغییر می‌کنند.

همواره تغییر متغیر طول به زاویه مسائل را ساده‌تر می‌کند.

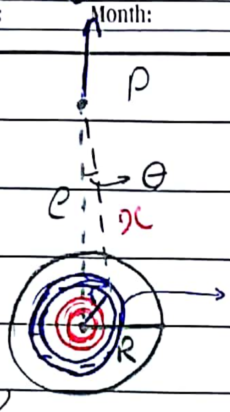
$$\longrightarrow \vec{E} = \hat{z}\int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\delta(\rho\, tg\theta)(\rho(1+tg^2\theta))\,d\theta\, d\alpha}{\rho^2(1+tg^2\theta)}$$

$$\cdot \cos\theta = \hat{z}\frac{\delta}{4\pi\varepsilon_0}\int \sin\theta\, d\theta\, d\alpha = \hat{z}\frac{\delta}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{tg^{-1}(\frac{R}{\rho})}\sin\theta\, d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\alpha$$

$$= \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+R^2}}\right)$$

AIDIN

Subject: $\vec{E}$
Year: Month: Day:



آری

روش دوم حل این مسئله: شعاع حلقه r_0

$$\vec{E}_{\text{حلقه}} = \hat{E}_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q\, l}{(l^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \underbrace{\frac{1}{(l^2+r^2)}}_{\frac{1}{x^2}} \cdot \underbrace{\frac{l}{(l^2+r^2)^{\frac{1}{2}}}}_{\cos\theta} \Rightarrow$$

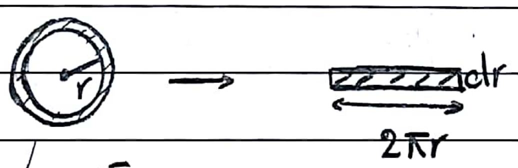
$\delta = \delta_0 \left(\frac{C}{m^2}\right)$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{x^2} \cos\theta \longrightarrow$$ اگر δ ثابت یا وابسته به r بود می توان از این رابطه بهره برد

$$\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{x^2} \cdot \cos\theta \qquad dq = \delta\, ds$$

پس $\Rightarrow dq = \delta_0\, 2\pi r\, dr$

ds :



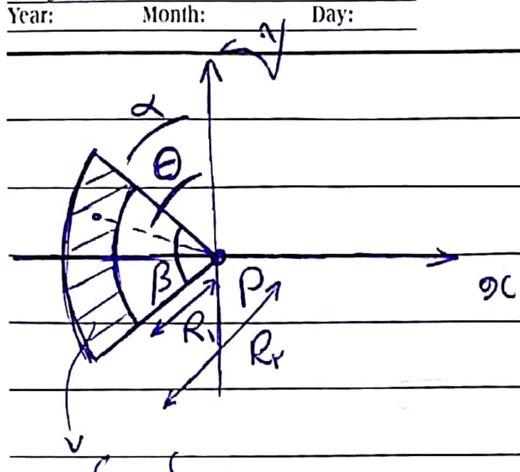
$\longrightarrow ds = 2\pi r\, dr$

بسیار نازک ← مساحتش تقریباً مشابه مساحت مستطیل است پس

$$\longrightarrow \vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{x^2} \cos\theta = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\delta_0 \cdot 2\pi r\, dr}{x^2} \cos\theta$$

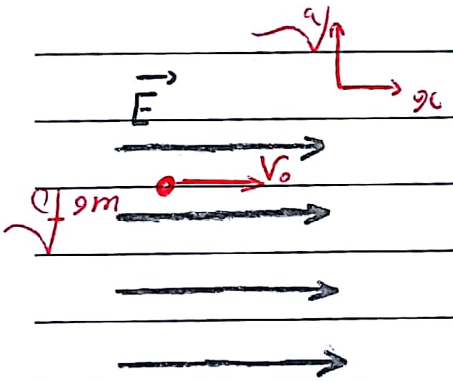
Subject:
Year: Month: Day:

مثال : $\vec{E}_P = ?$



$\delta = \delta_0 \underbrace{\sin\theta}_{r}$

بار الکتریکی نقطه‌ای در میدان الکتریکی یکنواخت :

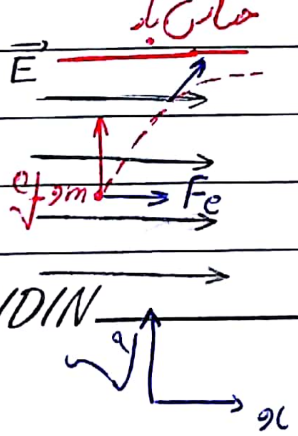


$$\vec{F}_{elec} = q\vec{E} \longrightarrow a = \frac{q\vec{E}}{m}$$

میدان یکنواخت پس a ثابت ⟸

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

سرعت اولیه در جهت راستای x

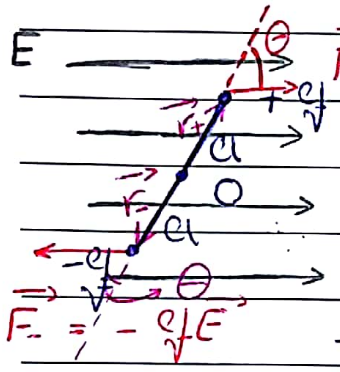


$$\vec{F}_m = q\vec{E} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\cdot\frac{q\vec{E}}{m} t^2 \\ y = v_0 t \end{cases} \longrightarrow x = \frac{1}{2}\frac{q\vec{E}}{m}\cdot\left(\frac{y}{v_0}\right)^2$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

دوقطبی الکتریکی در میدان:



$\vec F_+ + \vec F_- = 0$. اگر O ثابت شده باشد جسم می‌چرخد حول O.

گشتاور حول O

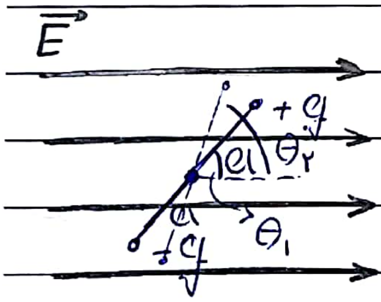
$$\vec\tau_+ = \underbrace{a\hat e}_{\vec r_+} \times \underbrace{q\vec E}_{\vec F_+} = aqE\sin\theta \otimes$$

$$\vec\tau_- = \vec r_- \times \vec F_- = aqE\sin\theta \otimes$$

$$\vec P = 2aq\hat e = q\vec d \qquad \vec\tau = \vec\tau_+ + \vec\tau_- = \underbrace{2aq}_{|\vec P|}\underbrace{E}_{|\vec E|}\sin\theta \otimes$$

$$= \vec P \times \vec E$$

انرژی ناشی از چرخش دوقطبی در میدان الکتریکی:



$$dx \xrightarrow{F} dW = F\,dx$$

$$d\theta \xrightarrow{\tau} dW = -\tau\,d\theta \qquad \tau = 2aqE\sin\theta$$

$$\Delta U\Big|_{\theta_1\to\theta_2} = -W = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} dW = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} -\tau\,d\theta$$

$$\Delta U\Big|_{\theta_1\to\theta_2} = 2aqE(-\cos\theta)\Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = 2aq\vec E(-\cos\theta_2 + \cos\theta_1) \underset{\theta_1 = \frac{\pi}{2}}{\Longrightarrow} = \underbrace{2aq}_{|\vec P|}\underbrace{\vec E}_{|\vec E|}(-\cos\theta_2) = -\vec P\cdot\vec E$$

θ_2: زاویه بین P و E

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

$$\Delta U_{\theta_1 \to \theta_2} = -\vec{p}\cdot\vec{E}\Big|_{\theta_2} - \left(-\vec{p}\cdot\vec{E}\Big|_{\theta_1}\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_2} \qquad \int_{\theta_1}^{\theta_2} \qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_1}$$

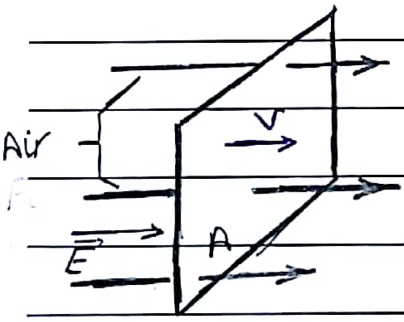
از با داشتن رابطه نیروی الکتریکی
انتگرال

فصل ۲۳ هالیدی: قانون گاوس

قانون کولن ⟷ قانون گاوس → یکی از ۴ قانون ماکسول

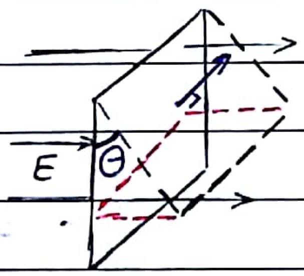
شار الکتریکی

شار به طور کلی برای پدیده‌های انتقال به صورت کمیت برداری و به صورت عمود بر سطح تعریف



$\phi = AE$ میدان الکتریکی یکنواخت عمود بر سطح دیده شود

مایل با سطح " " "



$$\phi = AE\cos\theta = \vec{A}\cdot\vec{E}$$

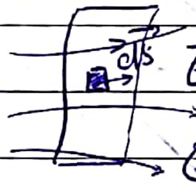
تعریف بردار سطح $\vec{A}$: که عمود بر سطح و اندازه‌اش برابر با مساحت $A\cos\theta$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

سطح دلخواه و میدان الکتریکی غیر یکنواخت:

$$d\phi = E\,dA \longrightarrow \phi = \int E\,dA$$



$\phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$

ds ← بردار سطح

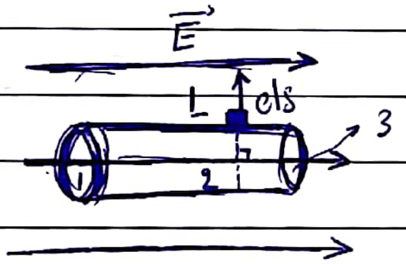
قانون گاوس:

$$\oint_S \phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Q ← کل بار موجود داخل سطح

خروجی — دخلاً

مثلاً اگر مثبت شده باشد برآیند خطوط میدان وارد بر حجم به سمت خارج حجم است. همواره ds را به سمت خارج حجم فرض می‌کنیم.



مثال: باید ds را برای ۳ سطح در نظر بگیریم

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \phi_{E(1)} + \phi_{E(2)} + \phi_{E(3)}$$

1:

ds ←

$$\longrightarrow \phi_{E_1} = \oint_S |\vec{E}||ds| \cos 180 = \int_{(1)} -E\,ds =$$

$$-E \int_{(1)} ds = -E(\pi R^2) \quad (A)$$

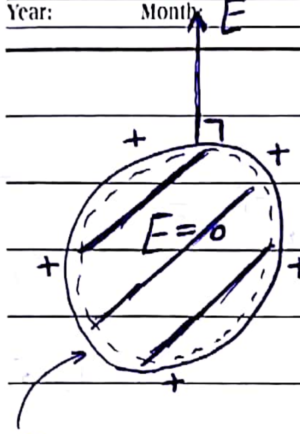
$$\phi_{E_2} = \oint_{(2)} |E||ds| \underbrace{\;}_{\cos(\frac{\pi}{2})} = 0 \quad (C)$$

$$\phi_{E_3} = +E(\pi R^2) \quad (B)$$

$$\xrightarrow{A, B, C} \phi_E = A + B + C = 0$$

→ ds

Subject:
Year: Month: Day:

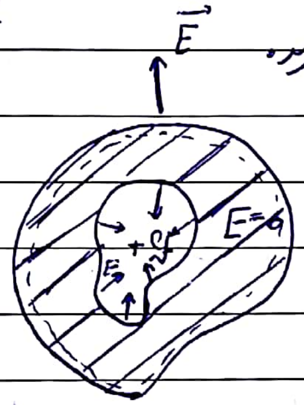


$\oint_E = 0 \rightarrow Q = 0$

قانون گاوس در جسم رسانا با حجم V :

بارهای الکتریکی قابلیت جابجایی داشته باشند.

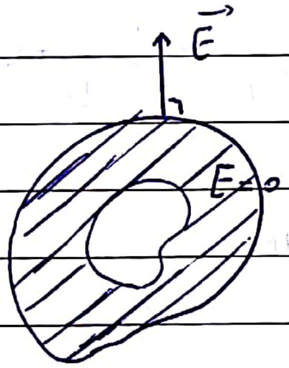
اگر باری به مرکز جسمی تزریق شود آنقدر جابجایی شود تا بار که به تعادل الکتریکی برسد.



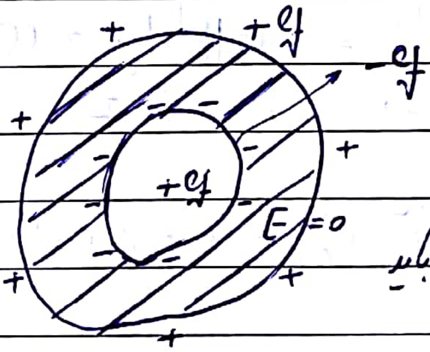
$\oint_E = 0 \rightarrow Q = 0 \rightarrow$

(A) حالتی که یک قسمت از جسم رسانا خالی باشد.

(B) حال اگر در قسمت تخلیه شده‌ی جسم q+ گذاریم



شکل برای حالت A :



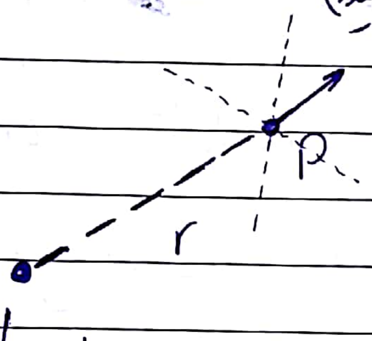
شکل برای حالت B :

فلز از ابتدا خنثی بوده پس وقتی q- روی سطح خالی شده قرار گرفت باید بار q+ طبق گاوس باشد که جسم همچنان خنثی باشد.

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

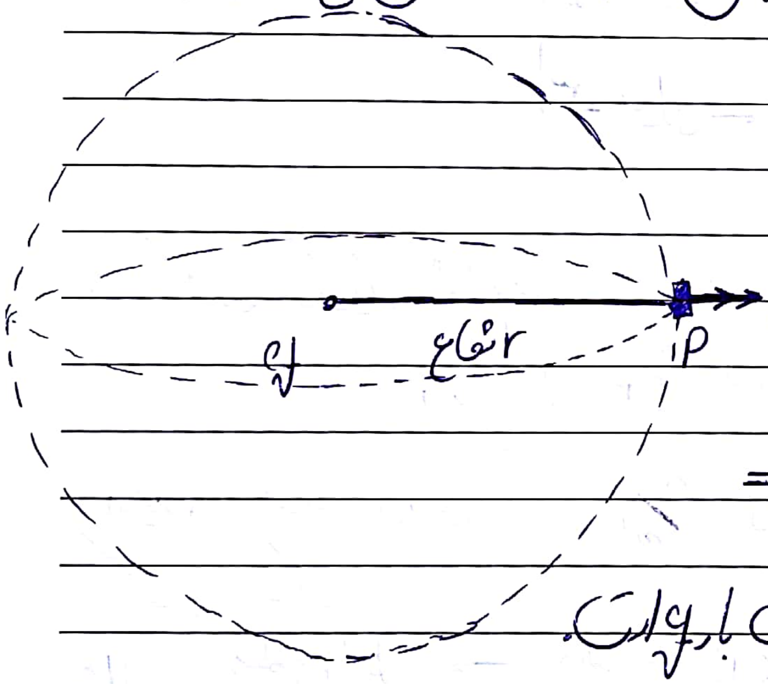
استفاده از قانون گاوس در جهت اثبات قانون کولن (برای میدان)



$$\Phi_E = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

قانون گاوس از روابط اسکالر پیروی می کند پس فقط اندازه را به ما می دهد و هیچ اطلاعاتی از جهت نمی دهد.

برای اینکه E ثابت از انتگرال خارج شود باید سطحی انتخاب شود که E روی سطح آن ثابت باشد و سطح کره این خاصیت را دارد.



$$\Phi_E = \oint_S E(r)\, ds \cos 0^\circ$$

$$= E(r)\oint_S ds = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow$$

این شرایط مشابه وضعیت تقارن به مرکزیت بار q است.

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \longrightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

برای استفاده از گاوس باید ابتدا ۲ چیز را مشخص کنیم: (۱) جهت میدان (۲) تابعیت فضایی میدان.

AIDIN

Subject: Year: Month: Day:

در نهایت

را همراه [illegible] شعاع جسم مورد نظر در نظر بگیرید.

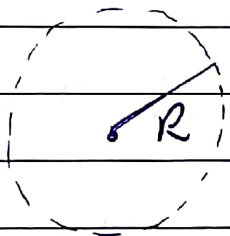
کاربردهای قانون گاوس:

در مسائلی که تقارن زیادی دارند به کمک ما می آید.

توزیع بارها

انواع تقارن های توزیع بار:

1. کروی ← بار نقطه ای
2. استوانه ای ← یک میله ی باردار (با شرط خاص) بی نهایت طویل با توزیع بار یکنواخت (خط)
3. صفحه ای ← صفحه ی بی نهایت با توزیع بار یکنواخت



تقارن کروی: در یک کره به شعاع R:

حجم: $\rho = \rho_0 \; C/m^3$ یا $\rho(r)$

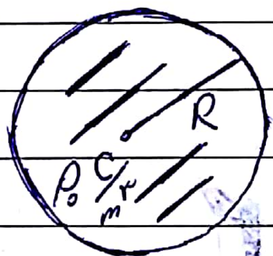
پوسته: $\sigma = \sigma_0 \; C/m^2$

اگر $\rho(r)$ باشد می توان تقارن کروی فرض کرد

مثال: $\vec{E} = ?$

حالت اول $0 < r < R$ ← سطح به داخل کره ی اولیه

حالت دوم $R < r$ ← سطح به خارج کره ی اولیه



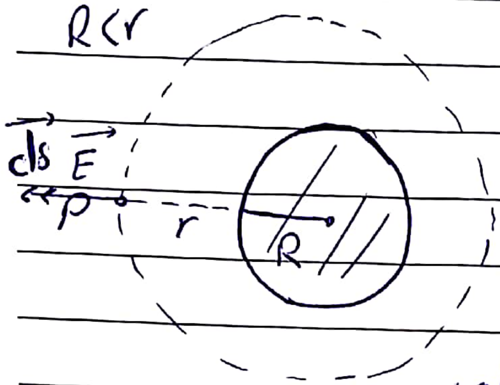
به ۲ قسمت فضا را تقسیم می کنیم برای راحت تر شدن محاسبات

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r} \qquad \Phi_E = \oint_S \vec{E}(r)\cdot \vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \longrightarrow$$

$R < r$



کل بار Q

$$E(r) \oint_S ds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \longrightarrow$$ جسم

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

اگر کل بار Q در مرکز کره ی اولیه تمرکز شود نیز مقدار میدان همین مقدار خواهد بود.

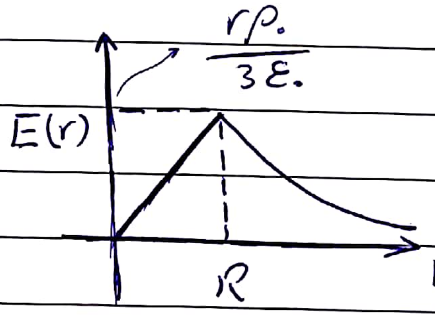
$0 < r < R$

$\rho(r)$ و $\rho_0 \; C/m^3$

$$\longrightarrow \Phi_E = \oint_S \vec{E}(r)\cdot\vec{ds} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

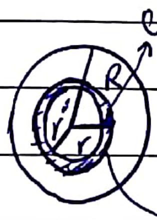
$$\longrightarrow E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0}{\varepsilon_0} \longrightarrow E(r) = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

$$E(r) = \begin{cases} r<R: & \dfrac{r\rho_0}{3\varepsilon_0} \\ r>R: & \dfrac{1}{3}\dfrac{R^3\rho_0}{\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$



$\rho(r) = \rho_0 r^2$

مثال: چون ρ برحسب r است باید المان برابر r در نظر بگیریم



$r' < r < R$ مساحت

$$dv = \underbrace{4\pi r'^2}_{\text{مساحت}} \underbrace{dr}_{\text{ارتفاع}}$$

$$dq = \rho(r)\,dv = \rho_0 r'^2 \cdot 4\pi r'^2 dr'$$

AIDIN

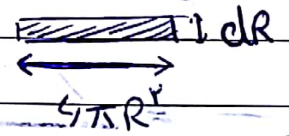
Scanned by CamScanner

Subject:
Year: Month: Day:

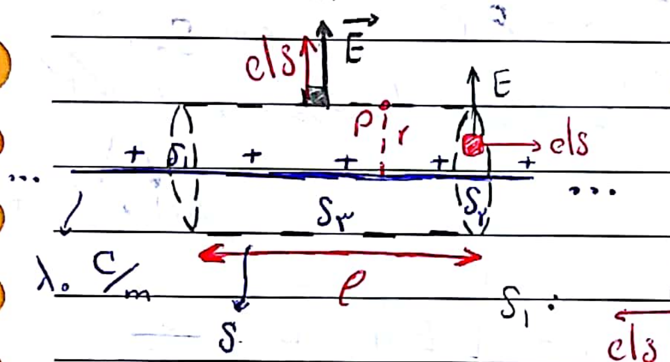
اگر ρ تابعی از r بود باید المان به صورت حلقه در نظر گرفت

$dv = \underbrace{ds}_{4\pi R^2} \cdot \underbrace{\text{ارتفاع}}_{dR}$

R دلخواه (با توجه به مسئله)



تقارن استوانه‌ای:



$\vec{E} = ?$

$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$ $\qquad \Phi_E = \oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

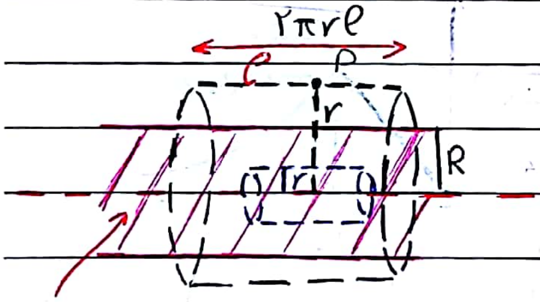
S_1 : $\longrightarrow \Phi_{E_1} = \oint_{s_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$

مشابه $\qquad \Phi_{E_2} = 0$

$\Phi_{E_3} = \oint_{s_3} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_{\text{سطح پیرامونی}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{\text{سطح پیرامونی}} E(r)\,ds \longrightarrow$

$\Phi_{E_3} = E(r)\underbrace{\int ds}_{2\pi r \ell} \longrightarrow E(r)\cdot 2\pi r \ell = \frac{Q}{\varepsilon_0} \xrightarrow{Q=\lambda_0 \ell} E(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\hat{r}$

استوانه با طول بی نهایت:

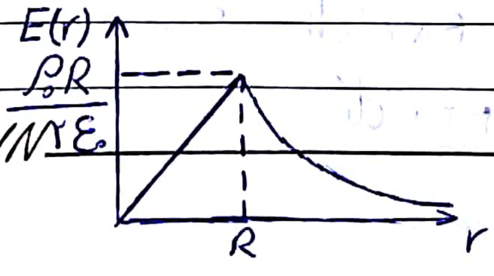


$E(r)\cdot 2\pi r \ell = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad Q = \pi R^2 \ell \rho_0$

$\longrightarrow E(r) = \frac{\pi R^2 \ell \rho_0}{2\pi r \ell} \quad : r > R$

$\rho(r) = \rho_0 \; C/m^3 \longrightarrow$ تقارن استوانه‌ای

$r < R \longrightarrow E(r)\cdot 2\pi r \ell = \frac{\pi r^2 \ell \rho_0}{\varepsilon_0} \longrightarrow E(r) = \frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0}$



AIDIN

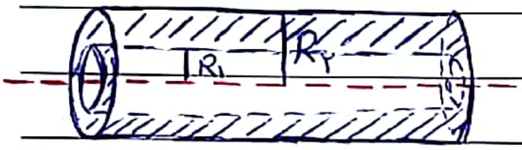
Subject:
Year: Month: Day:

$\vec{E} = E(r)\cdot\hat{r}$

$r < R_1$ تقارن $E(r)\,\underbrace{2\pi r\ell}_{\neq 0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$, $\underbrace{E(r)}_{=0}$, $E(r)=0$

① $R_1 < r < R_2$

② $r > R_2$



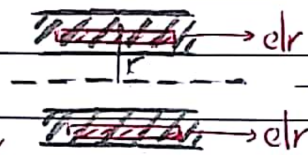
r فاصله تا محور استوانه

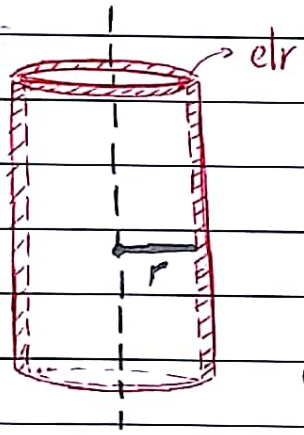
$\rho = \rho_0(r) = \rho_0 r^2 \; C/m^3$

~~زمانی می‌توان گفت جسم با رسانا بی‌مبدأ است که سطح متقارن باشد ممکن است سطح بدون بار اما~~

~~دارای میدان باشد.~~

① : $R_1 < r < R_2 \longrightarrow E(r)\cdot 2\pi r\ell \longrightarrow E(r)\,2\pi r\ell = \frac{Q}{\varepsilon_0}$





$dQ = (\rho_0 r^2)\,dv \qquad dv = S\,dr'$

$S = 2\pi r'\ell$

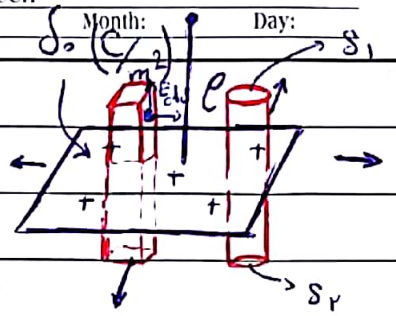
$Q = \int dQ = \int(\rho_0 r^2)dv = \int_{R_1}^{r} \rho_0 r^2 \cdot 2\pi r'\ell\, dr$

$= 2\pi\rho_0\ell\int_{R_1}^{r} r'^3 dr = \frac{\pi\ell\rho_0}{2}(r-R_1)^4$

② : $r > R_2$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:



تقارن صفحه‌ای

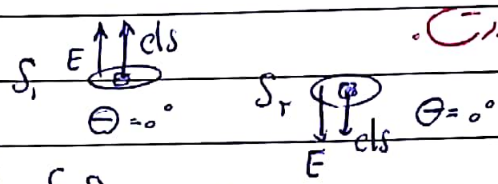
$$\vec{E} = E(z)\,\hat{z}$$

در این حالت شار عبوری از سطوح جانبی صفر است.

در بالای صفحه‌ی باردار میدان به سمت بالا و در زیر آن میدان به سمت پایین است.

$$\Phi_{S_1,S_2} = \oint_{S_1} \overset{E(z)}{\vec{E}}\cdot d\vec{s} + \oint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

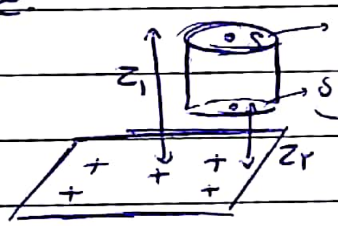
سطح بالا سطح پایین



$$= 2E(z)\underbrace{\oint ds}_{\text{سطح بالا } S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad Q = \delta.S \longrightarrow E(z) = \frac{\delta_0}{2\varepsilon_0}$$

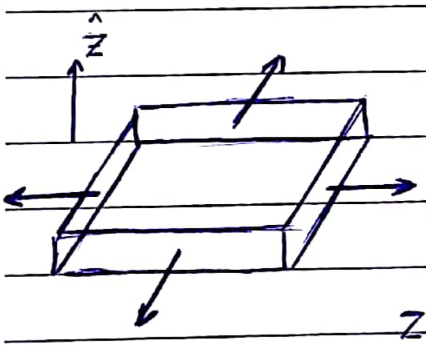
$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\delta_0}{2\varepsilon_0}\,(\hat{z}) & ; \; z > 0 \\[2mm] \dfrac{\delta_0}{2\varepsilon_0}\,(-\hat{z}) & ; \; z < 0 \end{cases}$$

نکته :



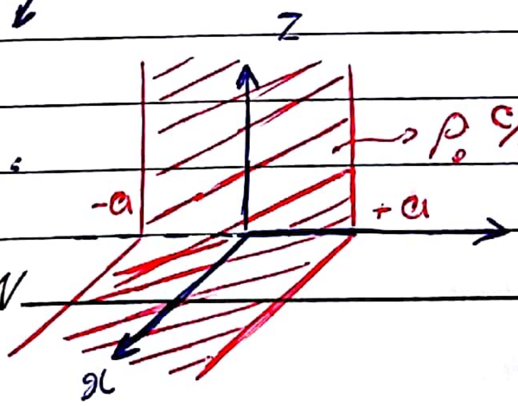
$$E(z_1)S + E(z_2)S = \big(\underbrace{E(z_1)+E(z_2)}_{=0}\big)\underbrace{S}_{\neq 0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (0)$$

$$\longrightarrow E(z_1) = -E(z_2)$$



مثال : در جهت $\hat{z}$ محدود است ⟵ $\rho\,(\hat{z})$: شرط تقارن صفحه‌ای بودن
صفحه

مثال :



$\rho_0\ C/m^3$ یا $\rho_0(y) \longrightarrow \vec{E} = E(y)\,\hat{y}$

ملکه بر روی محور y ها محدود است.

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

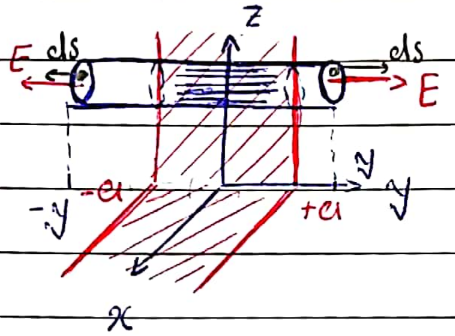
گرفتن سطح گوسی

تقارن سطح گوسی هم متقارن باشد

Ⓐ $|y|<a$ یا $-a<y<+a$

Ⓑ $|y|>a$ یا $y<-a$, $y>+a$

B :



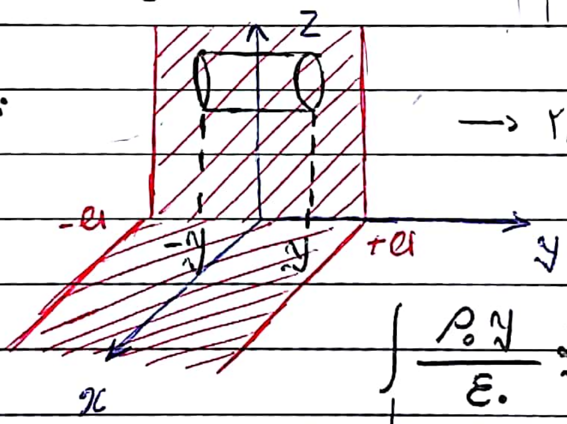
$$\to 2E(y)S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad Q \to S\cdot 2a\rho_0$$

$\Phi = 0$ جانبی استوانه

$$\to E(y) = \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}$$

$$\to \begin{cases} \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}\hat{y} & y>a \\ \frac{\rho_0 a}{\varepsilon_0}(-\hat{y}) & y<a \end{cases}$$

A :

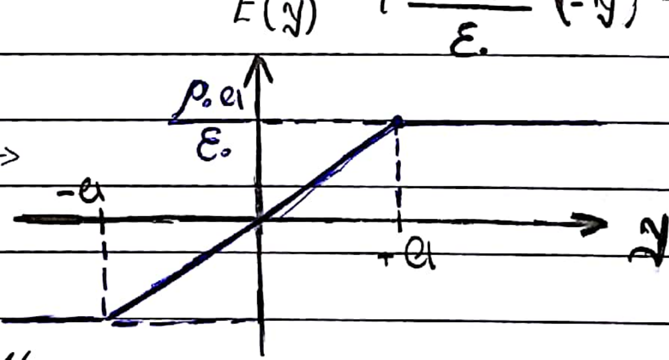


$$\to 2E(y)S = S(2y)\rho_0 \to$$

$$E(y) = \frac{\rho_0 y}{\varepsilon_0} \to$$

$$\begin{cases} \frac{\rho_0 y}{\varepsilon_0}\hat{y} & 0<y<a \\ \frac{\rho_0 y}{\varepsilon_0}(-\hat{y}) & -a<y<0 \end{cases}$$

$\to$



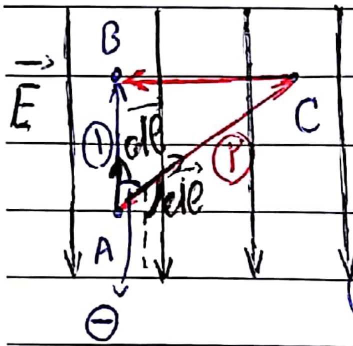
AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

پتانسیل الکتریکی

نیروی الکتروستاتیکی ← پایستار ← انرژی پتانسیل ← پتانسیل الکتریکی

مثال: آیا نیروی الکتروستاتیکی پایستار است؟



در مسیر ۱:

$$W_{AB} = \int_A^B \underbrace{\vec F}_{\text{کاری که ما انجام می‌دهیم}}\cdot d\vec l = \int_A^B -\vec F_{elec}\cdot d\vec l$$

$$= \int_A^B -\vec E q\cdot d\vec l = q\int_A^B -\vec E\cdot d\vec l \underset{\theta=\pi}{=} q\int_A^B E\, dl = qE\int_A^B dl$$

$$= qEd$$

در مسیر ۲:

$$W_{ACB} = \int_A^C \underbrace{\vec F}_{-qE}\cdot d\vec l + \int_C^B \underbrace{\vec F}_{-qE}\cdot d\vec l = -q\int_A^C \vec E\cdot d\vec l \underbrace{- q\int_C^B \vec E\cdot d\vec l}_{\theta=90^\circ=\frac{\pi}{2}}$$

$$= -q\int_A^C E\,dl\,\underbrace{\cos(\pi-\theta)}_{-\cos\theta} = qE\cos\theta\underbrace{\int_A^C dl}_{l} \overset{d=l\cos\theta}{=} qEd$$

$$U_{AB} = W_{AB} = \int_A^B -\vec F_{elec}\cdot d\vec l = -q\int_A^B \vec E\cdot d\vec l$$

اختلاف پتانسیل الکتریکی

$$V_{BA} = \frac{U_{AB}}{q} = \frac{W_{AB}}{q} = \frac{-q\int_A^B \vec E\cdot d\vec l}{q} = -\int_A^B \vec E\cdot d\vec l$$

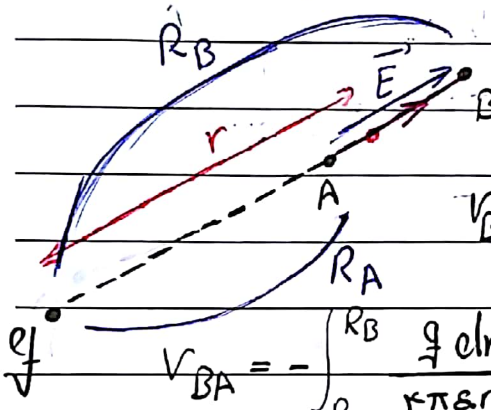
AIDIN

$$V = -\int \vec E\cdot d\vec l \longrightarrow \vec E = -\underbrace{\nabla}_{\text{گرادیان}} V$$

Subject:
Year: Month: Day:

پتانسیل الکتریکی نقطه‌ی A = اختلاف پتانسیل الکتریکی A نسبت به بی‌نهایت $= -\int_{\infty}^{A} \vec{E}\cdot d\vec{l} = V_A = V_{AB\to\infty}$

$$\left|\begin{array}{l} \vec{F}_{elec} = \vec{E}\,q \\ U_{AB} = q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} = q\,V_{AB} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{پس}} U_{AB} = q\,V_{AB}$$



۱- پتانسیل ناشی از یک بار نقطه‌ای:

$$V_{BA} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \underset{\theta=0}{=} -\int_A^B E\,dl \;,\; dr \Rightarrow$$

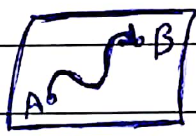
$$V_{BA} = -\int_{R_A}^{R_B} \frac{q\,dr}{4\pi\varepsilon r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A}\right) \quad \Big|\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}$$

اندازه

$$V_B = V_{BA\to\infty} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R_B} \longrightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

معنا: اگر از بی‌نهایت تا فاصله‌ی r از بار q حرکت کنیم، اختلاف پتانسیل برابر این مقدار است.

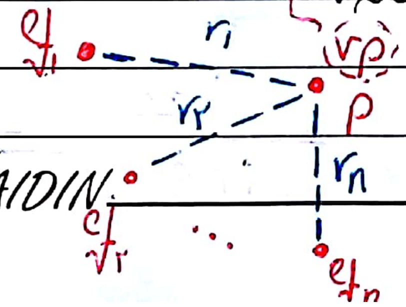
سطوح هم پتانسیل: مجموعه نقاطی از سطح که دارای پتانسیل یکسان هستند. ← خطوط میدان عمود



$$W_{AB} = V_{BA}\cdot q = \underbrace{(V_B - V_A)}_{0}\,q = 0 \qquad V_B = V_A$$

نسبت به بی‌نهایت

۲- پتانسیل ناشی از مجموعه‌ای از بارهای نقطه‌ای الکتریکی گسسته:



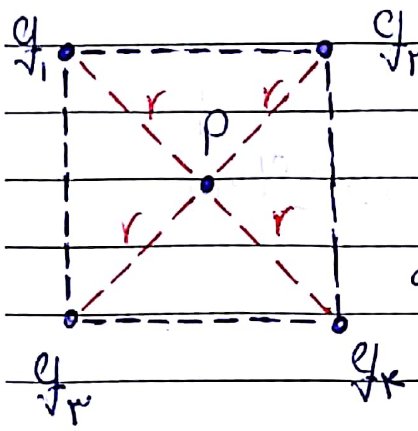
$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}_t\cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}_1\cdot d\vec{l} - \dots - \int_{\infty}^{P} \vec{E}_n\cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n$$

AIDIN

$$\longrightarrow V_p = \sum_{i=1}^{n} V_i(r) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

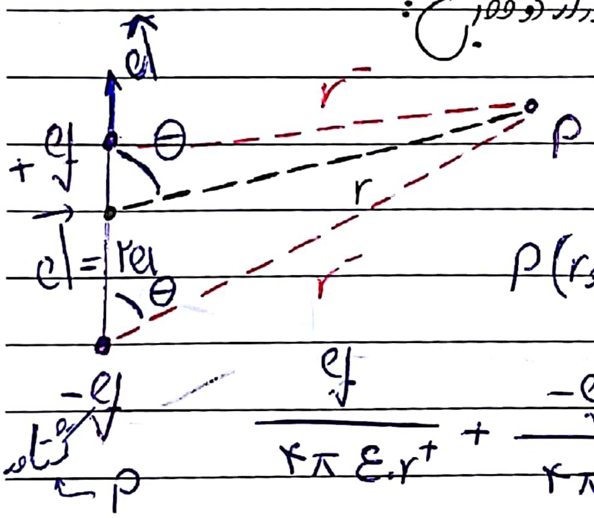
مثال:



$$V_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(q_1 + q_2 + q_3 + q_4\right)$$

نسبت بدهم

۳- پتانسیل ناشی از دوقطبی الکتریکی در نقاط خیلی دور از دوقطبی:



(تقریب) $r^+ = r^-$

$$P(r,\theta) \Rightarrow V_p = V_+ + V_- =$$

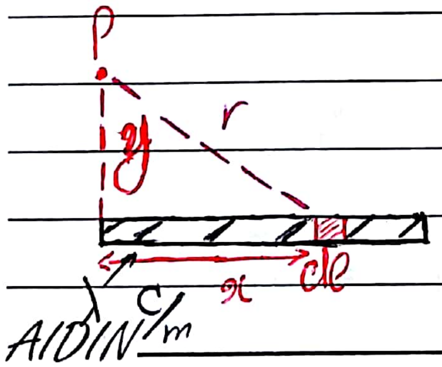
$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^+} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^-} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(r_-)-(r_+)}{r_+ r_-} =$$

$$r_+ r_- \approx r^2$$

$$\frac{q \cdot 2a\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

پتانسیل الکتریکی ناشی از بارهای پیوسته:

توزیع بار خطی:



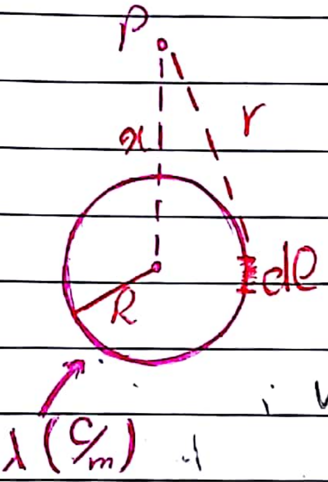
$$dq = \lambda dl = \lambda dx \longrightarrow dV = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

$$V_P = \int dV = \int_0^L \frac{\lambda\, dx}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\Big|_0^L$$

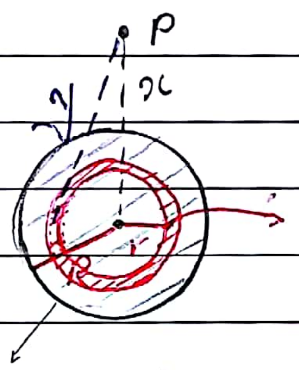
$$\Rightarrow V_P = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2+y^2}}{y}\right)$$



$dq = \lambda\, dl \rightarrow dV = \dfrac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r}$ طول حلقه $= 2\pi R$

$$V_P = \int dV = \int \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\underbrace{\int dl}_{\text{طول حلقه}} = \frac{2\pi R\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\overset{\text{کل بار}}{q}}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

پتانسیل ناشی از توزیع بار سطحی



$ds = 2\pi r\, dr$

$dq \longrightarrow dV = \dfrac{\overset{\sigma ds}{dq}}{4\pi\varepsilon_0 y} = \dfrac{\sigma 2\pi r\, dr}{4\pi\varepsilon_0 y} \longrightarrow V = \int dV = \int_0^R \dfrac{\sigma 2\pi r\, dr}{4\pi\varepsilon_0 y}$

$\sigma\ C/m^2$! $\sigma(r)$

$$= \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r\, dr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{x^2+R^2} - x\right]$$

$\hookrightarrow r^2+x^2 = u$

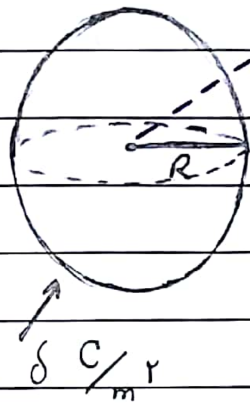
$2r\, dr = du$

$x \gg R : V = \dfrac{\sigma \pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 x}$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

براساس تقارن و قانون گاوس می توان کره را همچون نقطه در نظر گرفت.



$$r>R : E(r') = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2} \qquad q \to 4\pi R^2 \delta$$

$$V_P = -\int_\infty^P E\cdot dl = -\int_\infty^P E(r)\,dr \Rightarrow$$

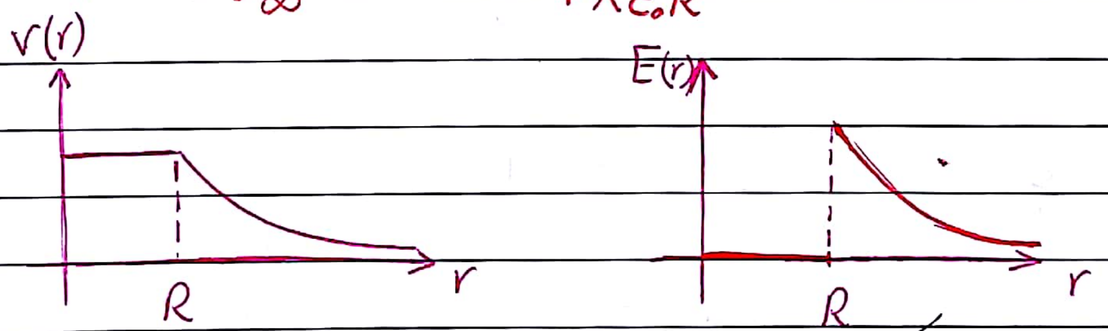
$$V_P = -\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\,dr' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r'}\right)\Big|_\infty^r =$$

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r} : r>R \qquad q \to \delta 4\pi R^2$$

$$\text{if}: r<R \quad \xrightarrow{\text{گاوس}} E=0, \quad V=0$$

پس در حالت کلی : $V_P = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\int_\infty^R E(r)\,dr - \overbrace{\int_R^r E(r)\,dr}^{0}$

$$\rightarrow V_P = -\int_\infty^R E(r)\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$



گاوس جایی مجاز است که تقارن فضایی داشته باشیم. ← حلقه چنین خاصیتی را ندارد.

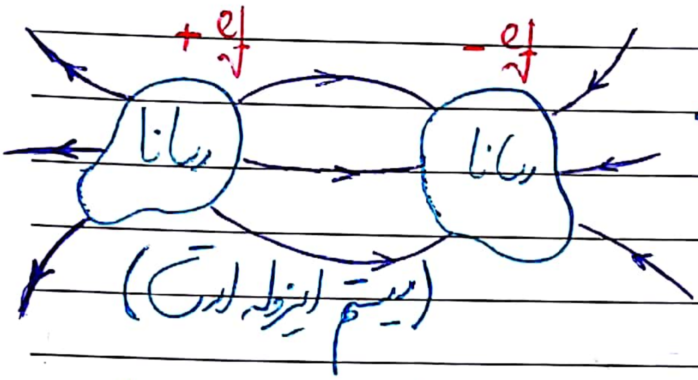
خازن ها و دی الکتریک:

← ذخیره سازی انرژی الکتریکی توسط جدایش بار الکتریکی

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

اختلاف پتانسیل باتری همواره ثابت است اما خازن با ایجاد خطی با بار وارده به خازن دارد.



خازن: تعریف کمال از طریق تعبیر

ظرفیت $C = \dfrac{q}{V}$ ← نسبت به ∞

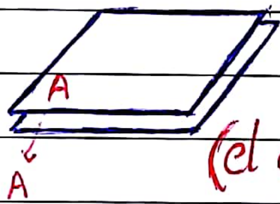
Capacity

فاراد $\left(F = \dfrac{1C}{1V}\right)$

$1\mu F = 10^{-6} F$

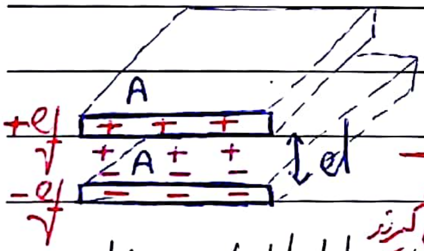
$1nF = 10^{-9} F$

$1pF = 10^{-12} F$



خازن تخت (صفحه‌ای)

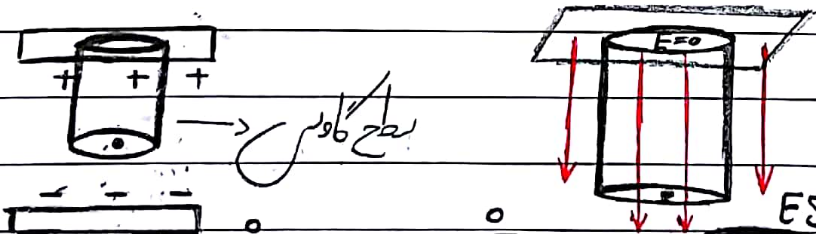
$(d \ll A)$



← بارهای پایین‌ترین نقطه‌ی سطح قرار می‌گیرند

$q \rightarrow E \rightarrow V$

به علت شرایط مسئله $(d \ll A)$ میدان ناشی از صفحات باردار با ابعاد بی‌نهایت



$\dfrac{q}{A}$ ← δS

$$\Phi_E = \overbrace{\int E \cdot ds}^{0} + \overbrace{\int \overset{0}{E} \cdot ds}^{0} + \overbrace{\int E \cdot ds}^{ES} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \rightarrow$$

روی سطح پیرامونی — روی سطح جانبی بالا — روی سطح جانبی پایین

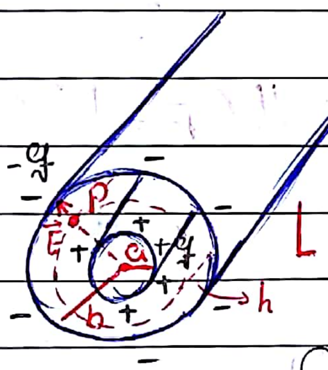
AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

$$E\cancel{S} = \frac{q}{A\varepsilon_0}\cancel{S} \longrightarrow E = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \longrightarrow$$ ثابت ← میدان صفحه‌ی بی‌نهایت
ثابت است

$$V = -\int_0^d -E\,dl = Ed = \frac{q}{\varepsilon_0 A}d \longrightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{\overset{\text{هوا}}{\varepsilon_0} A}{d}$$

۲- خازن استوانه‌ای (دو استوانه‌ی هم محور که یکی درون دیگری است).



استوانه‌ی درونی خالی یا توپر باشد تأثیری ندارد.

اگر استوانه‌ها ضخامت داشته باشند نیز تأثیری ندارد.

$$C = \frac{q}{V} \qquad (a,b \ll l) \qquad q \to E \to V$$

بدست آوردن میدان در نقطه‌ی P: P حالت استوانه‌ای به خودش بگیرد (طول استوانه: h

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \oint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{s} \qquad \sigma = \frac{q}{2\pi a L} \qquad Q = \sigma S \Rightarrow$$

سطح پیرامونی

$$Q = \frac{q}{2\pi a l}\cdot 2\pi a h = q\frac{h}{l}$$

$$E(r)\cdot 2\pi r\cancel{h} = \frac{q\cancel{h}}{l\varepsilon_0} \Longrightarrow E(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l}$$

$$\longrightarrow V = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r}$$ بازه‌ی انتگرال از b به a است زیرا همواره پتانسیل از صفحه‌ی مثبت تا صفحه‌ی منفی تغییر می‌کند.

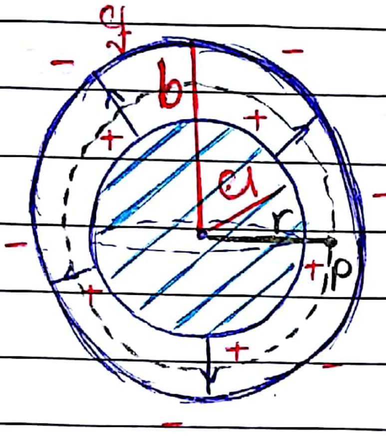
$$= -\int \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\,dr = \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln r\Big|_b^a = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a} \longrightarrow$$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

$$C = \frac{q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \ell}{\ln\frac{b}{a}}$$

۳- خازن کروی:



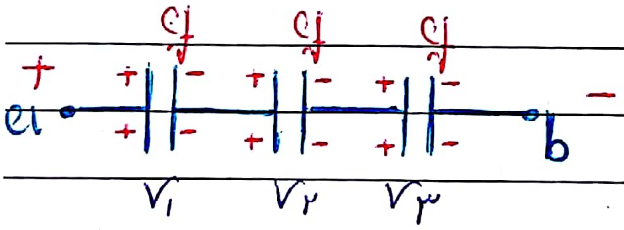
چون خازن کروی است می‌توان همچون نقطه درنظر گرفت $\longrightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \longrightarrow E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$V = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_b^a \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\right)_b^a = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$$

$$\longrightarrow C = \frac{q}{V} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

توالی و توازی خازن ها:

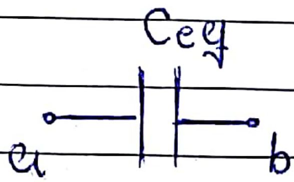


$$V_{ab} = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + \overset{\frac{q}{C_n}}{V_n}$$

$$\frac{q}{C_1} \qquad \frac{q}{C_2} \qquad \frac{q}{C_3}$$

$$\longrightarrow V_{ab} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}\right)$$

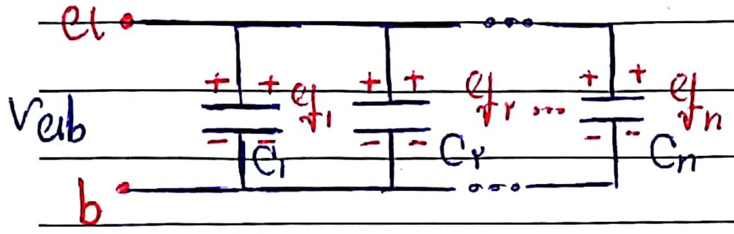
$$C_{eq} = \frac{q}{V_{ab}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}} \longrightarrow$$



AIDIN

$$\longrightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

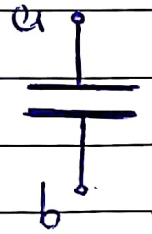
Subject:
Year: Month: Day:



$$Q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$$

$$C_1V \qquad C_2V \qquad C_nV$$

$$= V\underbrace{(C_1 + C_2 + \cdots + C_n)}_{C_{eq}} \longrightarrow C_{eq} = \frac{Q}{V_{ab}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$



$$\longrightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

انرژی پتانسیل الکتریکی :

$q_1 \longrightarrow$ بار دیگری نیست

جابجایی بار از بی نهایت به این نقطه $\longrightarrow E = 0 \longrightarrow W = 0 \longrightarrow V = 0$

انرژی ذخیره شده

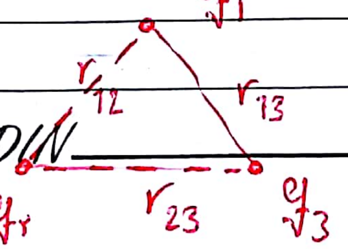
q_1 ●- - - - r - - - -● q_2

$$V_{12} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad U = V_{12}\, q_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = q_1 V_{21}$$

q_A ●———● B (V_{BA})

$$U = V_{BA} \cdot q$$

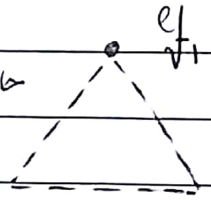
مثال :



AIDIN

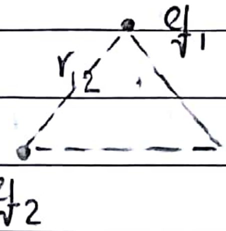
Subject:
Year: Month: Day:

حالت اول



$U = 0$

حالت دوم :

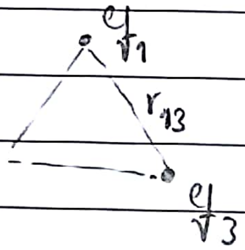


$$U_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r_{12}}$$

$V_1 q_2$

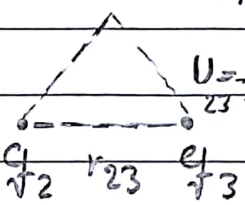
$V_2 q_1$

حالت سوم



$$U_{13} = \frac{q_1 q_3}{4\pi \varepsilon_0 r_{13}}$$

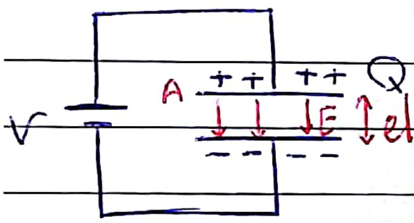
حالت چهارم



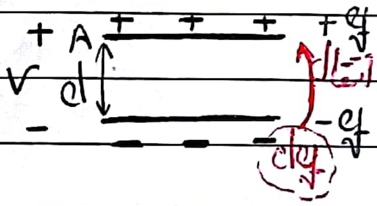
$$U_{23} = \frac{q_2 q_3}{4\pi \varepsilon_0 r_{23}}$$

$$\xrightarrow{\text{کل}} U = U_{12} + U_{23} + U_{13}$$

انباشت انرژی الکتریکی در خازن :



$q < Q$



$$dW = V\,dq \rightarrow W = \int dW = \int V\,dq \Rightarrow$$

$$W = \int \frac{q\,dq}{C} \rightarrow U = W = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{C}\,\frac{q^2}{2}\Big|_0^Q$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 \xrightarrow{V=Ed} U = \frac{1}{2}C(Ed)^2$$

چگالی انرژی در واحد حجم : $u = \dfrac{U}{V} = \dfrac{\frac{1}{2}C E^2 d^2}{V} \xrightarrow[V=Ad]{\text{جایگذاری}} u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

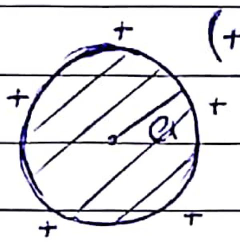
$C = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d}$

AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

$$U = \int_{V} \underbrace{u}_{\text{چگالی انرژی}} \; \underbrace{dv}_{\text{المان حجم}}$$

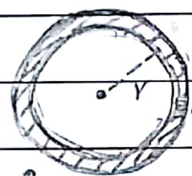
مثال: یک خازن کروی منزوی داریم. بار الکتریکی $+q$ را روی آن قرار می‌دهیم. چگالی انرژی و انرژی کل ذخیره شده را بدست آورید.



$(+q)$

$u = ?$ $\qquad U = ?$

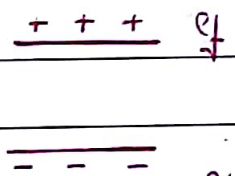
$$E \begin{cases} E = 0 & : r < a \longrightarrow u = 0 \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & : r > a \longrightarrow u = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \dfrac{1}{32\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q^2}{\pi^2 r^4} \end{cases}$$

$U = \int u\, dv$  $dr \longrightarrow dv = 4\pi r^2 dr \longrightarrow$

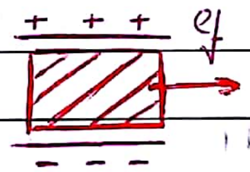
$$U = \int \frac{1}{32\varepsilon_0} \frac{q^2}{\pi^2 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\varepsilon_0 \pi} \int_a^{\infty} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

راه دوم $\longrightarrow$ $U = +\dfrac{1}{2} \dfrac{q^2}{\underbrace{4\pi\varepsilon_0 a}_{C \text{ خازن کروی}}}$

دی الکتریک ← عایق



قرار دادن دی الکتریک $\longrightarrow$

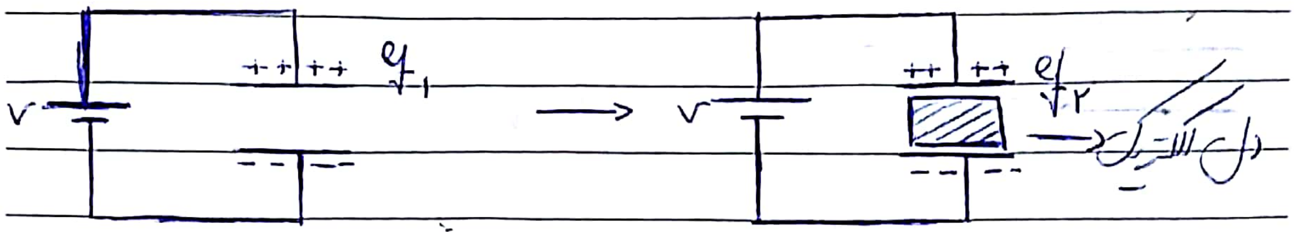


دی الکتریک

AIDIN $\quad V_1 = \dfrac{q}{C_1}$ در خازن $\qquad V_2 < V_1 \qquad V_2 = \dfrac{q}{C_2} \longrightarrow C_2 > C_1$

$q_2 > q_1$

Subject:
Year: Month: Day:

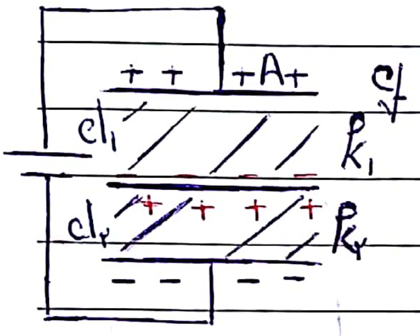


$q_2 > q_1$

$C_2 V$, $C_1 V$

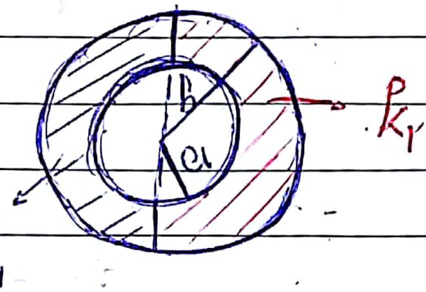
$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{C_2}{C_1} = k \rightarrow \text{تابع جنس دی الکتریک}$$

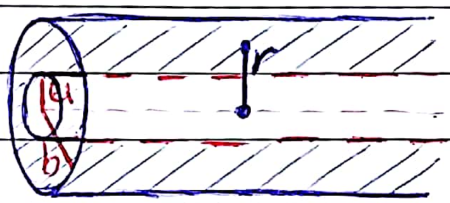
$$\rightarrow \boxed{C_k = C_0 k}$$



سری

موازی →

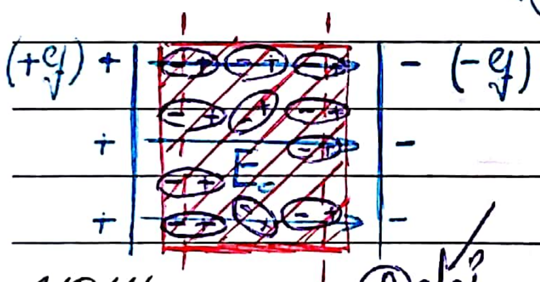




$$k = k_0 r$$

↳ سری

دی الکتریک ها از دیدگاه اتمی (میکروسکوپی)



$$\frac{q}{\frac{\epsilon_0 A}{d}} = V_0 = E_0 d$$

C_0

AIDIN

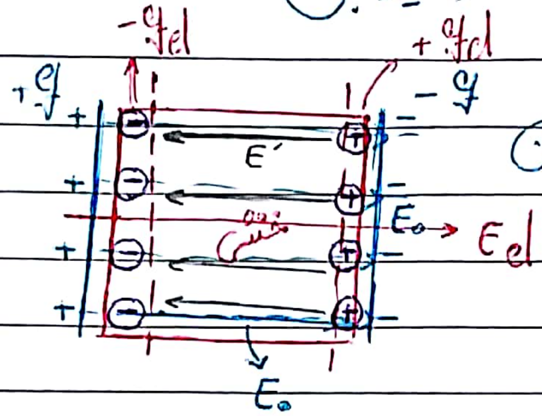
شکل (A)

Subject:
Year: Month: Day:

دی الکتریک از دیدگاه اتمی | قطبی: آب
| غیر قطبی: شیشه

اعمال میدان

E



(B) شکل →

E_0 میدان بین صفحه خازن

$E_0 \to E_{el}$

$$E_{el} = E_0 - E'$$

$$\frac{E_d(el)}{E_0(el)} = \frac{V_{el}}{V_0} = \frac{1}{k}$$

قانون گاوس در دی الکتریک ها:

دی الکتریک کل

I) دی الکتریک: $\varepsilon_0 \oint E \cdot ds = q$ → کل بار خنثی (ایزوله) $= q - q_{el} = \frac{q}{k}$ بار آزاد

II) بدون دی الکتریک: $\varepsilon_0 \oint E \cdot ds = Q \to q$

$$\frac{I}{II}: \frac{q - q_{el}}{q} = \frac{E_{el}}{E_0} = \frac{1}{k} \to (q - q_{el}) = \frac{q}{k}$$

$$I: \varepsilon_0 \oint E \cdot ds = \frac{q}{k} \to q = \varepsilon_0 k \oint E \cdot ds$$

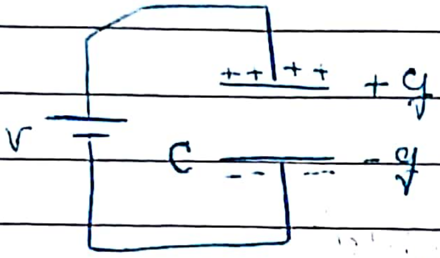
کل بار آزاد روی سطح گاوسی

AIDIN

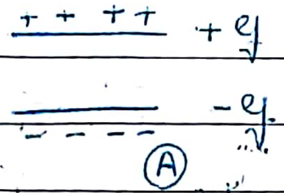
Subject:
Year: Month: Day:

q داشتن بار $\xrightarrow[\text{به}]{\text{رسیدن}}$ k   k داشتن $\xrightarrow[\text{به}]{\text{رسیدن}}$ q

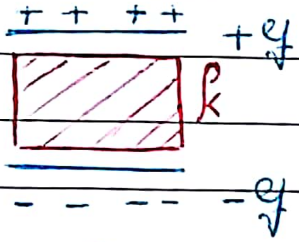
مثال: تغییر انرژی خازن بین حالت های زیر را بیابید



(1) جدا کردن خازن از باتری



$$U_A = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}CV_0^2$$

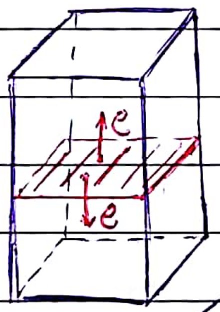


$$U_B = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C'} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{kC}$$

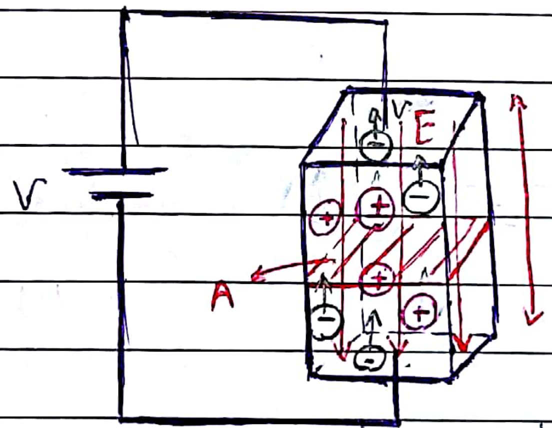
$U_B = \frac{1}{k}U_C \longrightarrow$ نیرویی که کاهش یافته صرف غلبه بر نیروی F وارده بر دی الکتریک از طرف دو صفحه خازن شده است.

فصل ۲۶:

جریان و مقاومت:



مقطع رسانا



$V = \int E \cdot dl$

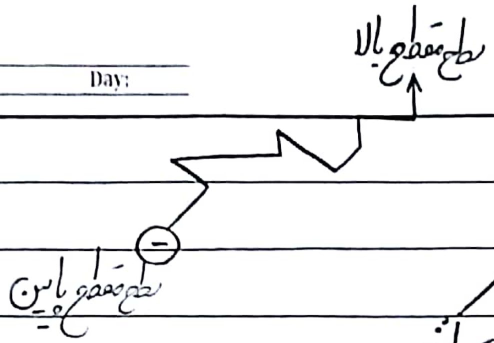
$V = El$

حرکت الکترون‌ها در خلاف جهت میدان E ←

AIDIN

(ماکروسکوپیک) $i = \frac{q}{t} \longrightarrow \frac{dq}{dt} = i$

Subject:
Year: Month: Day:



مسیر حرکت الکترون درون رسانای با میدان E :

یا دلیل این مسیر حرکت

نیرویی که بارهای مثبت به بارهای منفی وارد می کنند
(+) (-)

مشخص می شود که الکترون‌ها با سرعت ثابتی موسوم به سرعت سوق به طرف مقطع بالا حرکت می کنند

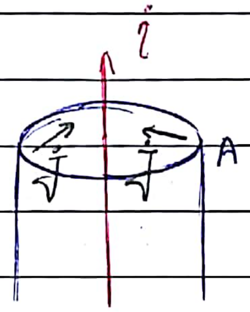
ایجاد مقاومت (R)

سرعت سوق : v_d

چگالی جریان $\vec{J} = \frac{i}{A}\hat{L}$

(مدار دایره ای)

عکس جهت حرکت الکترون‌ها در نقطه مورد نظر



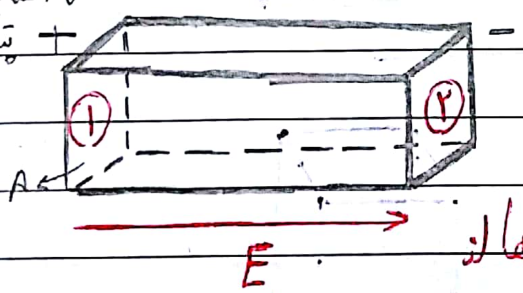
$\vec{J} = \frac{di}{dA}\hat{L}$

دیدیم $i = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$

بردار با اندازه dA و عمود بر سطح

ℓ

اختلاف پتانسیل V



در واحد حجم

n : چگالی حامل‌های بار دارای قابلیت حرکت

v_d

مدت زمانی که حامل ها از ① به ② می روند $t = \frac{L}{v_d}$

تعداد حامل های منتقل شده $= nV = n(A\ell)$

حجم مکعب

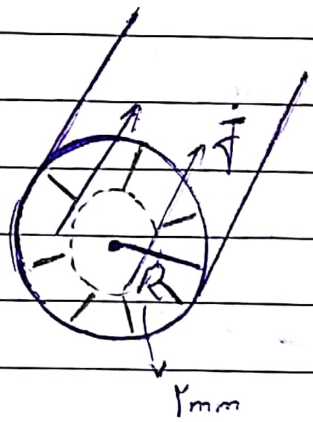
AIDIN

Subject:
Year: Month: Day:

$$i = \frac{(n(Ad\ell) \times e)}{t} = \frac{nA\ell e}{\frac{\ell}{v_d}} = nAev_d$$

q

$\rightarrow \vec{J} = nev_d \rightarrow$ به جنس و سرعت میانگین وابسته است.



سیم به شکل استوانه

مثال: $R = ۲mm$

$J_0 = ۲\times ۱۰^{۵}\ A/m^{۲}$

جریان عبوری بین فاصله شعاعی $r=\frac{R}{۲}$ تا $r=R$ چقدر است؟

$J = J_0\ A/m^2$

$J = J_0 r^{۲}\ \frac{A}{m^{۲}}$

برای دو حالت

(1) حالت: $I = J_0 \times A = J_0 \times \left(\pi R^{۲} - \pi \left(\frac{R}{۲}\right)^{۲}\right) = \frac{3}{4}\pi R^{۲} J_0$

(۲) ″ : $I = \int \vec{J}\cdot d\vec{s} = \int J\,ds = \int_{\frac{R}{۲}}^{R} J_0 r^{۲}(۲\pi r)\,dr = ۲\pi J_0 \left(\frac{r^{۴}}{۴}\right)\Big|_{\frac{R}{۲}}^{R}$

$ds = ۲\pi r\,dr$

مقاومت الکتریکی یک قطعه رسانا: $R = \frac{V}{I}$ $\left(\Omega = \frac{V}{A}\right) \rightarrow$ ماکروسکوپیک

چگالی مقاومت: $\rho = \frac{\vec{E}}{\vec{J}}$ ← R برای یک نقطه

AIDIN (مقاومت ویژه)

میکروسکوپیک

Subject:
Year: Month: Day:

ساده‌ترین حالت

مکعب مستطیل

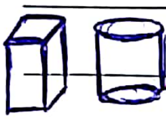
تابع جنس

$$\rho = \frac{E}{J} = \frac{V/\ell}{i/A} = \frac{V}{i}\cdot\frac{A}{\ell} = R\cdot\frac{A}{\ell} \rightarrow R=\rho\frac{\ell}{A}$$

مکعب مستطیل با میدان یکنواخت

و قوه

محاسبه R برحسب ρ :



۱- یکنواخت (ρ ثابت) و شکل دارای سطح مقطع ثابت ← $R=\rho\frac{\ell}{A}$

I : تغییرات ρ در راستای جریان

۲- ρ ثابت نبوده و یا سطح مقطع شکل یکسان نداشته باشد

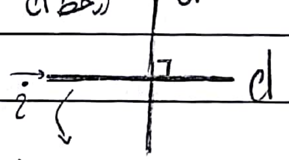
II : تغییرات ρ عمود بر جریان

۲-I : قطعه به قطعات با مساحت یکتا و طول $d\ell$ به صورت متوالی تقسیم می‌شود.

المان‌های سری

$$I: dR = \rho\frac{d\ell}{A} \longrightarrow R=\int dR$$

ρ متغیر با فاصله عمود از خط $d\ell$



۲-II :

$$II: dR = \rho\frac{\ell}{dA} \longrightarrow \frac{1}{R}=\int\frac{1}{dR}$$

ρ روی این خط ثابت

المان‌های موازی