



دانشگاه تهران

به نام او که جان را فکرت آموخت



پردیس دانشکده های فنی

نیمسال دوم ۹۶-۹۷

تمرین درس ریاضی ۲ (تبدیلات خطی)

۱- تبدیل خطی  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  طوری است که:

$$T(0,1) = (2,1,-1); \quad T(1,2) = (3,-1,5)$$

الف) ماتریس تبدیل  $T$  را نسبت به پایه‌های استاندارد (کانونی) پیدا کنید.

ب) پوچی و رتبه  $T$  را تعیین کنید و یک پایه برای فضای هسته و برد  $T$  بیابید.

۲- نگاشت  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  با ضابطه  $T(x,y) = (x, x+y, -x-y, 2y)$  تعریف شده است.

الف) نشان دهید که  $T$  خطی است و سپس ماتریس آن را نسبت به پایه‌های استاندارد به دست آورید.

ب) بعد هسته و بعد فضای نقش (برد)  $T$  را بیابید.

۳- فرض کنید  $V = C(-1,1)$  (توابع پیوسته بر بازه  $[-1, 1]$ ) و تبدیل خطی  $T$  از  $V$  به  $V$  به صورت‌های زیر تعریف شده باشد:

$$a) \quad T(f(x)) = g(x) = \int_{-1}^1 f(t)(t-x)^2 dt \quad b) \quad T(f(x)) = g(x) = \int_{-1}^1 f(t)(1-tx)^2 dt$$

$$c) \quad T(f(x)) = g(x) = \int_{-1}^1 f(t) \sin(x-t) dt \quad d) \quad T(f(x)) = xf'(x)$$

برای هر کدام از تبدیلات فوق، فضای پوچ و برد را توصیف کرده، رتبه و پایه‌های آن‌ها را وقتی متناهی هستند تعیین کنید.

۴- فرض کنید  $T$  و  $S$  دو تبدیل از  $V_3$  به  $V_3$  باشند که با ضوابط زیر تعریف شده‌اند:

$$T(x,y,z) = (x, x-2y, x+y+z), \quad S(x,y,z) = (z, -y, x)$$

الف) بررسی کنید که آیا این دو تبدیل یک به یک هستند یا خیر. در صورت یک به یک بودن، ضابطه تبدیل‌های  $T^{-1}$ ،  $S^{-1}$  و  $(ST)^{-1}$  را پیدا کنید.

ب) ماتریس تبدیل‌های  $T$  و  $S$  را پیدا کنید.

پ) ضابطه تبدیل  $(ST-TS)$  را یکبار به طور مستقیم و بار دیگر با استفاده از ماتریس این تبدیل‌ها به دست آورید.

۵- اگر در فضای تمام توابع حقیقی پیوسته،  $S$  زیر فضای پیموده شده توسط اعضای مجموعه‌های زیر بوده و  $D$  عملگر مشتق‌گیر باشد، در هر حالت ماتریس  $D$  را نسبت به این پایه‌ها پیدا کنید.

الف)  $(1, x, e^x)$

ب)  $(\sin(x), \cos(x), x \sin(x), x \cos(x))$

۶- اگر  $T: V \rightarrow W$  یک تبدیل خطی باشد که  $V$  و  $W$  هر یک با بعد ۲ و هر یک با پایه  $(e_1, e_2)$  هستند به طوریکه:

$$T(e_1 + e_2) = 3e_1 + 9e_2; \quad T(3e_1 + 2e_2) = 7e_1 + 23e_2$$

الف) پوچی و رتبه  $T$  را به دست آورید.

ب) ماتریس  $T$  را نسبت به این پایه‌ها پیدا کنید.

پ) پایه جدیدی برای  $W$  به شکل  $(e_1 + ae_2, 2e_1 + be_2)$  بیابید که ماتریس  $T$  نسبت به آن‌ها به شکل قطری باشد.

۷- فرض کنید  $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  به صورت زیر تعریف شده است. در این صورت هسته آن را پیدا کرده و یک به یک و پوشا بودن  $T$  را بررسی کنید.

$$T(x, y, z) = (x - y + z, 2x + y - z)$$

۸- فرض کنید  $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$  به صورت زیر تعریف شده است

$$T(x, y, z) = (x - y, 2y - 2z)$$

الف: ماتریس نمایش این تبدیل در پایه‌های استاندارد  $\mathbf{R}^2$  و  $\mathbf{R}^3$  را بیابید.  
ب: فضای پوچ و نیز بعد فضای تصویر را پیدا کنید.  
ج: یک به یک بودن و پوشایی تبدیل را بررسی کنید.

۹- هسته تبدیل  $f$  با ماتریس نمایش زیر را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

۱۰ فرض کنید تبدیل  $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  به صورت  $T(x, y) = (x - y, x + 2y, x)$  تعریف شده است.

الف) نمایش ماتریسی این تبدیل نسبت به پایه‌های استاندارد را بیابید.  
ب) یک به یک بودن و پوشایی آن را بررسی کنید.  
ج) معادله فضای تصویر با به صورت  $ax + by + cz = 0$  بیان کنید.