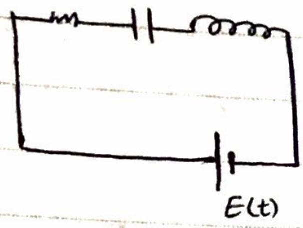
Subject: ۹۴/۱۱/۱۵

Year: Month: Date:

@UTME96

معادلات دیفرانسیل

معادله جریان عبوری از این مدار؟



$RI = R\dfrac{dq}{dt}$

خازن $V = \dfrac{q}{c}$ سیملوله — $L\dfrac{dI}{dt} = L\dfrac{d^2q}{dt^2}$

$$\Rightarrow R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{c} = E(t)$$

* تعریف معادله دیفرانسیل ← معادله‌ای که شامل یک تابع و تعداد متناهی از مشتقات آن باشد.

مرتبه معادله دیفرانسیل ← مرتبه بالاترین مشتقی که در معادله وجود دارد.

$y' + 4y = 0 \rightarrow$ مرتبه ۱

$y'' = \cos(t) \rightarrow$ مرتبه ۲

$x^2y''y' + 2e^xy' = (x^2+y^2)y^2 \rightarrow$ مرتبه ۲ $\quad y^{(4)} - xy'' = \sin x \rightarrow$ مرتبه ۴

* یک معادله مرتبه n را در حالت کلی می‌توان به صورت زیر نوشت. $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

فرم کلی معادلات مرتبه اول ← $F(x,y,y') = 0$ یا $y' = f(x,y)$

* جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ← تابعی که در بازه تعریف شده n بار مشتق پذیر باشد و در معادله دیفرانسیل صدق کند.

نشان دهید $y = x^2$ جوابی برای معادله دیفرانسیل زیر است؟

$xy' = 2y \Rightarrow$ معادله مرتبه ۱ است پس تابع باید حداقل ۱ بار مشتق پذیر باشد

تابع ۱ بار مشتق پذیر است ✓ حال باید در معادله صدق کند ← $(x)(2x) = 2(x^2)$ ✓

$y'' + y = 0 \Rightarrow y = \sin t$ یا $y = \cos t$ یا $y = \sin t + \cos t$

یا $y = 5\sin t - 4\cos t$

پس معادلات دیفرانسیل یک جواب یکتا و مشخص ندارند ولی یک فرم مشخص دارند

Arman

* به مجموعه جواب های یک معادله دیفرانسیل جواب عمومی معادله می گویند. مثلاً جواب عمومی معادله فوق برابر است با $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

* معادله جرم و فنر *

$$-Kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m\ddot{x} + Kx = 0$$

این مسأله بی نهایت جواب دارد، همه جواب ها به همین فرمت $y = C_1 \sin t$ خواهند بود ولی با توجه به شرایط اولیه مسأله (x در لحظه $t=0$ یا $\dot{x}$ در لحظه $t=0$) یک جواب باقی می ماند.

* معادلات خطی *

۹۶/۱۱/۱۷

یک معادله مرتبه n، خطی نامیده می شود هرگاه به صورت زیر باشد.

$$a_0(x)(y)^{(n)} + a_1(x)(y)^{(n-1)} + \dots + a_n(x)(y) = f(x)$$

یعنی ترم هایی مانند y^2، yy'، y'^2 و ... نداشته باشیم. مثلاً داریم:

$y'' + 4y'^2 = 0$

خطی نیست چون y'^2 داریم

$y'' + (\sin x)y' + y = 0 \rightarrow$ خطی (ضرایب از مشتقات y)

خطی $\leftarrow x^2y'' + 3xy' + y = \cos^3 x$

معادله خطی مرتبه اول ←

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = f(x)$$

$$\xrightarrow[a_0 \text{ بر}]{\text{طرفین تقسیم}} y' + p(x)y = g(x)$$

روش حل ← فرض کنیم $p(x)$ و $g(x)$ در بازه $x \in (\alpha, \beta)$ پیوسته باشند. طرفین را در یک تابعی مانند $\mu(x)$ (عامل انتگرال ساز) ضرب می کنیم.

$$\mu(x)[y' + p(x)y] = \mu(x)g(x) \quad I$$

$\mu(x)$ را طوری تعیین می کنیم که حل مسأله راحت تر شود. فرض می کنیم.

$$\mu(x)[y' + p(x)y] = (\mu(x)y)' \quad II$$

Subject:
Year: Month: Date:

$$\Rightarrow \cancel{\mu(x)y'} + \mu(x)P(x)\cancel{y} = \mu'(x)\cancel{y} + \cancel{\mu(x)y'}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = P(x) \Rightarrow \text{انتگرال} \Rightarrow \ln\mu(x) = \underbrace{\int^x p(t)\,d(t)}_{=\int p(x)dx} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(t)dt}$$

رابطه II,I $\Rightarrow (\mu(x)y)' = \mu(x)g(x) \xRightarrow{\int} \mu(x)y = \int \mu(x)g(x)dx + c$

$$\Rightarrow y = \frac{\int \mu(x)g(x)dx + c}{\mu(x)}, \quad \mu(x) = e^{\int^x p(t)\,dt}$$

؟ $xy' + 2y = 4x^2 \Rightarrow y' + \frac{2}{x}y = 4x$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int^x 2/t\, dt} = e^{\ln x^2} \Rightarrow \mu(x) = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$\Rightarrow y = \frac{\int \mu(x)g(x)dx + c}{\mu(x)} = \frac{\int x^2 \times 4x + c}{x^2} = \frac{x^4 + c}{x^2} = x^2 + \frac{c}{x^2}$$

ثابت c خیلی مهم است چون به ازای هر c یک تابع مختلف داریم ← برای محاسبه تمام توابع های صادق در معادله باید c را بنویسیم

؟ $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2} \quad x>0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

مثل مثال قبل $\mu(x) = x^2 \Rightarrow y = \frac{\int x^2 \times \frac{\cos x}{x^2} dx + c}{x^2} = \frac{\sin x + c}{x^2}$

$$\Rightarrow y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow \cancel{\cos(x)\times x^2} - (\sin x + c)\,2x = 0 \Rightarrow c = -\sin x = -1$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sin x - 1}{x^2}$$ چون در مسئله شرایط اولیه گفته شده فقط یک تابع به دست می آید

؟ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x}, \quad y(1) = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{e^y - x}$

Arman

$\Rightarrow y'e^y - xy' = 1 \Rightarrow$ چون e^y داریم پس معادله خطی نیست

برحسب y خطی نیست ولی اگر x تابعی از y باشد، خطی است.

$$\frac{dx}{dy} = e^{y} - x$$

فرض کنیم x تابعی از y باشد: پس طرفین را معکوس می‌کنیم

$$\Rightarrow x' + x = e^{y} \Rightarrow p(y) = 1 \quad , \quad g(y) = e^{y}$$

$$\Rightarrow \mu(y) = e^{\int p(t)\,dt} = e^{y} \Rightarrow x = \frac{\int \mu(x) g(y)\,dy + C}{e^{y}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\int e^{2y} + C}{e^{y}} = \frac{\frac{1}{2} e^{2y} + C}{e^{y}} = \frac{1}{2} e^{y} + \frac{C}{e^{y}} \xrightarrow[y=0]{x=1} C = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(e^{y} + e^{-y}\right) = \cosh(y) \Rightarrow y = \operatorname{ArcCosh}(x)$$

قضیه ← اگر توابع $p(x)$ و $g(x)$ در بازه $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، آنگاه جواب یکتایی مانند $y = \varphi(x)$ وجود دارد که در معادله $y' + p(x)y = g(x)$ صدق کرده و شرط اولیه $y(x_0) = y_0$ را برقرار کند $(\alpha < x_0 < \beta)$

؟ $x y' + 2y = x^2 - x + 1 \quad , \quad y(1) = \frac{1}{2}$ $\qquad p(x) = \frac{2}{x} \quad , \quad g(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$

$$\mu(x) = x^2 \Rightarrow y = \frac{\int x^2 (x - 1 + \frac{1}{x}) + C}{x^2} = \frac{\int x^3 - x^2 + x + C}{x^2} = \frac{\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3} + \frac{C}{x^2} = y \Rightarrow \frac{1}{4} + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + C = \cancel{\frac{1}{2}} \Rightarrow C = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{12x^2}$$

در ابتدا چون دو تابع $p(x)$ و $g(x)$ ناپیوسته هستند پس فرض می‌کنیم در بازه‌ی مثلاً $(\frac{1}{2} , \infty)$ بررسی می‌کنیم که نقطه $x=1$ (شرط مسأله) در بازه باشد و $x=0$ (نقطه ناپیوستگی) در بازه نباشد

Subject:

Year: Month: Date:

* جواب ناپیوسته ← اگر در معادله خطی مرتبه اول، توابع $p(x)$ ، $g(x)$ یا یکی از آنها در نقطه ای مانند $x=x_0$ ناپیوسته باشد و ما بخواهیم یک جواب پیوسته برای آن به دست آوریم، یک بار برای $x<x_0$ و یک بار برای $x>x_0$ حل کرده و دو ثابت ظاهر می شود.

یک معادله، شرط اولیه است، یک معادله شرط پیوستگی y در نقطه $x=x_0$ است.

؟ $y'+2y=g(x)$ $\quad y(0)=0$ $\quad g(x)=\begin{cases}1 & x<1\\ 0 & x>1\end{cases}$

$\Rightarrow x>1 \Rightarrow \mu(x)=e^{\int 2\,d(x)}=e^{2x}$

$\Rightarrow y_1=\frac{\int 0+c}{e^{2x}}=\frac{c}{e^{2x}}=ce^{-2x}$

$x<1 \Rightarrow y_2=\frac{\int e^{2x}dx+c'}{e^{2x}}=\frac{\frac{1}{2}e^{2x}+c'}{e^{2x}} \Rightarrow y(0)=0 \Rightarrow 1+c'=0 \Rightarrow \boxed{c'=-1}$

$x=1 \Rightarrow y_1=y_2 \Rightarrow \frac{c}{e^2}=\frac{e^2-1}{2e^2} \Rightarrow \frac{e^4-e^2}{2e^2}=c \Rightarrow \boxed{c=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}}$

روش دوم حل معادله اول $\Rightarrow y'+2y=0 \to y'=-2y \Rightarrow \frac{y'}{y}=-2 \xRightarrow{\int} \ln y=-2x+c$

$\Rightarrow y=e^{-2x}\times e^{c}=e^{-2x}\times c_2=c_2e^{-2x} \Rightarrow \dots$

$\Rightarrow c_2=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}$

معادله برنولی $\quad y'+p(x)y=g(x)y^n$ و $n\neq 0,1$

اگر $n=0$ یا $n=1$ باشد معادله خطی درجه اول می شود.

می توان نشان داد که با تغییر متغیر $u=y^{1-n}$ معادله به یک معادله مرتبه اول خطی برحسب u تبدیل می شود.

$\Rightarrow u=y^{1-n} \Rightarrow \frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\times y' \Rightarrow y'=\frac{u'}{(1-n)(y^{-n})}$

Arman $\Rightarrow \frac{u'}{(1-n)(y^{-n})}+p(x)y=g(x)y^n \xRightarrow{\times(1-n)(y^{-n})} u'+p(x)(1-n)\underbrace{y^{1-n}}_{u}=(1-n)g(x)$

$\Rightarrow u'+p(x)(1-n)u=(1-n)g(x)$ → معادله مرتبه اول خطی

۹۶/۱۱/۲۴

Subject :

Year : Month : Date :

? معادله زیر را حل کنید. معادله مرتبه اول غیرخطی ← $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$

$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}y^3 \Rightarrow$ معادله برنولی $\Rightarrow v = y^{-2} \quad (n=3) \Rightarrow v' = -2y^{-3}y'$

$\xrightarrow{\text{معادله}\times y^{-3}} y^{-3}y' + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow -\frac{v'}{2} + \frac{2}{x}v = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v' - \frac{4}{x}v = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow$ خطی مرتبه اول

* دقت کنید که در آخر v برحسب x بدست می‌آید سپس به جای v، y^{-2} قرار دهید.

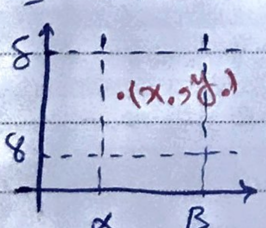
---

* معادلات مرتبه اول غیرخطی ← فرم کلی → $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

* قضیه ← فرض کنید توابع f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مستطیل $\alpha < x < \beta$ و $\gamma < y < \delta$ که شامل نقطه (x_0, y_0)

پیوسته باشند، آنگاه معادله فوق قطعاً دارای یک جواب یکتا در بازه $x_0 - h < x < x_0 + h$ که مشمول

$\alpha < x < \beta$ است، می‌باشد. اگر نقطه (x_0, y_0) در داخل ناحیه پیوستگی نباشد یا روی مرز باشد، قضیه کاربردی

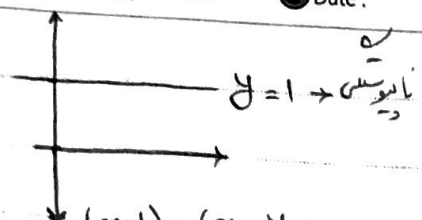


ندارد. برای تشخیص ناحیه اعتبار باید معادله را حل کرده، دامنه آن را بیابید.

? در مورد وجود و یکتایی جواب برای معادله زیر بحث کرده، سپس آن را حل کنید و ناحیه اعتبار جواب را بیابید.

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}}_{f(x,y)} , \quad y(0) = -1$$

محدوده ناپیوستگی f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ خط $y=1$ است. $\Leftarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\cdots}{(y-1)^2}$



نقطه اولیه داخل محدوده پیوستگی است پس این معادله با شرط اولیه

$* \; (0,-1) = (x_0, y_0)$

$y(0) = -1$ قطعاً دارای یک جواب یکتاست.

* معادلاتی که در آنها بشود همه x ها و dx را یک طرف و همه y ها و dy را یک طرف نوشت، جدایی پذیر نامیده می شوند *

$$\Rightarrow dy \times 2(y-1) = dx\,(3x^2+4x+2) \overset{\int}{\Longrightarrow} (y-1)^2 = x^3+2x^2+2x+C$$

⇒ شرط اولیه را اعمال می کنم $\Rightarrow C = 4 \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$

طبق قضیه یک جواب یکتا باید داشته باشیم. با توجه به شرط اولیه، فقط رادیکال (-) ق ق است.

$\Rightarrow y = 1 - \sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$ ⇒ ناحیه اعتبار جواب ⇒ دامنه جواب را می یابیم

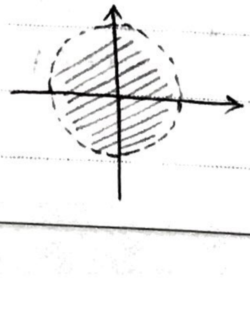
$$\Rightarrow x^3+2x^2+2x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$

? برای معادله دیفرانسیل زیر، ناحیه ای را تعیین کنید که اگر شرط اولیه معادله از آن انتخاب شود، وجود و یکتایی جواب تضمین شود.

$$y' = (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

$\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{-2y}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}$ ⇒ محدوده پیوستگی $\Rightarrow 1-x^2-y^2 > 0 \rightarrow x^2+y^2 < 1$

سطح داخل یک دایره به شعاع 1 (خود دایره جواب نیست)



? معادله زیر را حل کنید؟

$y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$

معادله جدایی پذیر $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^{1/3} \Rightarrow \frac{dy}{y^{1/3}} = dx \xrightarrow{\int} y^{+2/3} \times \frac{3}{2} = x + C$

$\xRightarrow{\text{شرط اولیه}} C = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{(\frac{2}{3}x)^3}$

* چون $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{3y^{2/3}}$ می باشد، در $y = 0$ ناپیوسته است و اگر شرط اولیه از روی این ناحیه انتخاب شود تضمینی برای درستی قضیه و یکتایی جواب وجود ندارد و همانطور که می بینید دو جواب برای معادله فوق به دست آمد. (که هر دو قابل قبولند)

اگر شرط اولیه از ناحیه پیوستگی انتخاب شود، انتظار داریم به جواب یکتا برسیم. به عنوان مثال فرض کنید $y(0) = 1$ باشد:

$\frac{3}{2}y^{2/3} = x + C \xrightarrow{\text{شرط}} C = 3/2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{[\frac{2}{3}(x + \frac{3}{2})]^3}$

طبق شرط اولیه فقط رادیکال + ق‌ق است $\Rightarrow y = \sqrt{[\frac{2}{3}(x + \frac{3}{2})]^3}$

? معادله زیر را حل کنید؟

$y' = 1 + x + y^2 + xy^2 \Rightarrow y' = 1 + x + y^2(1+x) = (1+x)(1+y^2) \rightarrow$ جدایی پذیر

$\Rightarrow \frac{dy}{y^2+1} = dx\,(1+x) \xrightarrow{\int} \text{Arctan}\, y = x + \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = \tan(x + \frac{x^2}{2} + C)$

* نکته ← معادلاتی به صورت $y' = \frac{ax+by}{cx+dy}$ با تغییر متغیر $v = \frac{y}{x}$ به معادله جدایی پذیر تبدیل می شوند.

$$y' = \frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{a+b(y/x)}{c+d(y/x)} \Rightarrow u = y/x \Rightarrow y' = u'x + u$$

$$\Rightarrow u'x + u = \frac{a+bu}{c+du} \Rightarrow u'x = \underbrace{\frac{a+bu}{c+du} - u}_{F(u)}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} \times x = F(u)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{F(u)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$$ جدایی پذیر

*نکته ← معادلاتی به فرم $y' = F(ax+by+c)$ با تغییر متغیر $u = ax+by+c$ به معادله جدایی پذیر تبدیل می‌شوند

$$y' = F(ax+by+c) \Rightarrow u = ax+by+c$$
$$\Rightarrow u' = a + by'$$

$$\Rightarrow \frac{u'-a}{b} = F(u) \Rightarrow u' = bF(u) + a \Rightarrow \frac{du}{dx} = bF(u) + a$$

$$\Rightarrow \frac{du}{bF(u)+a} = dx \Rightarrow$$ جدایی پذیر

معادله زیر را حل کنید؟

$$y' = \tan(x+y) - 1 \qquad y(0) = \pi/2$$

$$x + y = u \Rightarrow u' = 1 + y' \Rightarrow u' - \cancel{1} = \tan(u) - \cancel{1} \Rightarrow \frac{du}{\tan u} = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{\tan u} = x \Rightarrow \ln \sin u = x + C \Rightarrow \sin(x+y) = e^{x+C}$$

$$\xRightarrow{\text{شرط اولیه}} C = 0 \Rightarrow \sin(x+y) = e^{x}$$

* نکته ← در حالت حل معادله دیفرانسیل به صورت $y' = F(x,y)$ هرگاه $F(x,y)$ تابعی از $\frac{y}{x}$ یا $\frac{x}{y}$ باشد،

این معادله را همگن گویند و با تغییر متغیر $u = \frac{y}{x}$ مسأله حل خواهد شد (جدا پذیر خواهد شد)

$$y' = F(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$-\ y' = \frac{2y-x}{2x-y} \Rightarrow y' = \underbrace{\frac{2(y/x)-1}{2-(y/x)}}_{F(y/x)} \rightarrow \text{همگن} \Rightarrow \frac{y}{x} = u$$

$$\Rightarrow u' = \frac{y'x - y}{x^2} \Rightarrow y' = \frac{x^2u'+y}{x} \Rightarrow \frac{x^2u'+y}{x} = \frac{2u-1}{2-u}$$

$$\Rightarrow x^2u'+y = x\left(\frac{2u-1}{2-u}\right) \Rightarrow u' = \left(x\left(\frac{2u-1}{2-u}\right) - y\right) \times \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow u' = \frac{2u-1}{(2-u)x} - \frac{u}{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{x}\left(F(u)\right) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}F(u)$$

$$\Rightarrow \frac{du\,(2-u)}{u^2-1} = \frac{dx}{x} \xRightarrow{\int} \ln x = \underbrace{\int \frac{2-u}{u^2-1}\,du}_{I}$$

$$\Rightarrow \frac{2-u}{(u-1)(u+1)} = \frac{A}{(u-1)} + \frac{B}{(u+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=-1 \\ A-B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$C + \ln x = \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{3}{2}\ln|u+1|$$

$$\ln c' + \ln x^2 = \ln\left|\frac{u-1}{(u+1)^3}\right| \Rightarrow c'x^2 = \left|\frac{u-1}{(u+1)^3}\right| \Rightarrow \frac{y/x - 1}{(y/x+1)^3} = c'x^2$$

$$\Rightarrow |y-x| = c'|y+x|^3$$

Subject :

Year : Month : Date :

$- \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x} \Rightarrow y' = 1 + \dfrac{y}{x} = F\left(\dfrac{y}{x}\right) \rightarrow$ همگن

$- (3x^2 - xy)\,dx + x^2\,dy = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2 - xy}{x^2} = -3 + \dfrac{y}{x} = F\left(\dfrac{y}{x}\right) \rightarrow$ همگن

** معادلات کامل **

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

در حساب دیفرانسیل داریم ← $df = F'(x)\,dx$

فرض کنید تابع دو متغیره ای مانند $U(x,y)$ داریم ← $dU = \dfrac{\partial U}{\partial x}dx + \dfrac{\partial U}{\partial y}dy$

اگر $dU = 0$ باشد یعنی تابع U ثابت است ← $U(x,y) = C$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = 0 \Rightarrow U(x,y) = C$$

اگر $M(x,y)$ را بتوان $\dfrac{\partial U}{\partial x}$ و $N(x,y)$ را بتوان $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ فرض کرد معادله $M\,dx + N\,dy = 0$

معادله کامل نامیده می شود. اگر بتوانیم U ای را پیدا کنیم که $\dfrac{\partial U}{\partial x} = M$ و $\dfrac{\partial U}{\partial y} = N$ در این صورت جواب معادله

$M\,dx + N\,dy = 0$ برابر است با ← $U(x,y) = C$

$$\underbrace{M(x,y)}_{\frac{\partial U}{\partial x}}dx + \underbrace{N(x,y)}_{\frac{\partial U}{\partial y}}dy = 0$$

* چون $\dfrac{\partial U}{\partial x} = M,\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = N \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \end{cases}$ ← اگر U پیوسته باشد، باید دو عبارت فوق برابر باشند:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

در این صورت اطمینان داریم که U ای وجود دارد که $U(x,y) = C$

Arman

Subject:

Year: Month: Date:

* اگر معادله‌ای کامل بود، دستگاه زیر را حل کرده و u را بدست می‌آوریم ←

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N \end{cases}$$

جواب معادله برابر است با $U(x,y) = C$

؟ $(2xy^2+2y)\,dx + (2x^2y+2x)\,dy = 0$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial M}{\partial y} = 4xy+2 \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = 4xy+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow$$ معادله کامل

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2+2y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2y+2x$$

$$\Rightarrow U(x,y) = \int (2xy^2+2y)\,dx = x^2y^2+2xy+\underbrace{h(y)}_{\text{ثابت}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{2x^2y}+\cancel{2x} = \cancel{2x^2y}+\cancel{2x}+\frac{dh}{dy} \Rightarrow \frac{dh}{dy} = 0 \Rightarrow h = C'$$

$$U(x,y) = C \Rightarrow x^2y^2+2xy+C' = C \Rightarrow x^2y^2+2xy = C$$

؟ $\underset{\frac{dy}{dx}}{y'} = -\dfrac{3x^2-2xy+2}{6y^2-x^2+3} \Rightarrow \underbrace{(3x^2-2xy+2)}_{M}\,dx + \underbrace{(6y^2-x^2+3)}_{N}\,dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2x \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow$$ معادله کامل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2-2xy+2 \Rightarrow U = x^3 - x^2y + 2x + h(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6y^2-x^2+3 \Rightarrow 6y^2-\cancel{x^2}+3 = -\cancel{x^2}+\frac{dh}{dy} \Rightarrow h = 2y^3+3y$$

Arman

$$\Rightarrow x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y = C$$

? نشان دهید چون معادله زیر صدق نمی‌کند نمی‌توان U ای را پیدا کرد که $U_x = M$ و $U_y = N$ باشد؟

$(3x^2 + 2xy)\,dx + (x+y^2)\,dy = 0 \qquad M_y = 2x \neq N_x = 1$

فرض کنیم بدون توجه به کامل نبودن معادله، پیش برویم.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 2xy \rightarrow U = x^3 + x^2 y + h(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + y^2 \rightarrow x^2 + \frac{dh}{dy} = x + y^2 \Rightarrow \frac{dh}{dy} = x + y^2 - x^2$$

چون h تابعی از y است نباید در آن x ظاهر شود

---

* عامل انتگرال‌ساز ← فرض کنید معادله $Mdx + Ndy = 0$ کامل نباشد. طرفین معادله را در μ ضرب کرده و سعی می‌کنیم μ را طوری پیدا کنیم که معادله جدید کامل شود. (μ تابعی از x و y است)

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \xrightarrow{\times \mu} \mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0$$

⇐ شرط کامل بودن ⇐ $(\mu M)_y = (\mu N)_x \Rightarrow \mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N\mu_x - M\mu_y}$$

* حل این معادله به مراتب سخت‌تر از معادله اصلی است. چون هم μ و هم μ_x و هم μ_y در معادله ظاهر شده است.

■ حالت خاص را در نظر بگیرید که μ فقط تابعی از x باشد.

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N\frac{d\mu}{dx}} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}\,dx$$

* عبارت $\frac{M_y - N_x}{N}$ فقط باید تابعی از x باشد تا معادله قابل حل باشد.

Subject:

Year: Month: Date:

فرض کنید μ تابعی از y باشد.

$$\frac{1}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N\mu_x - M\mu_y} \Rightarrow \mu_x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{-M\frac{d\mu}{dy}} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{-M}\,dy$$

عبارت $\frac{M_y - N_x}{-M}$ باید فقط تابعی از y باشد تا معادله قابل حل باشد.

معادله $Mdx + Ndy = 0$ ← شرطی عامل انتگرال ساز تابعی از x دارد که $\frac{M_y - N_x}{N}$ فقط تابعی از x باشد

" " y " " " $\frac{M_y - N_x}{M}$ " " y باشد

? $\underbrace{y(2x+y^3)}_{M}\,dx - \underbrace{x(2x-y^3)}_{N}\,dy = 0$

$M_y = 2x + 4y^3 \qquad N_x = -4x + y^3 \Rightarrow$ معادله کامل نیست

* فرض کنید μ تابعی از x باشد پس ← $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}\,dx$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{3y^3 + 6x}{-2x^2 + y^3x} \Rightarrow$$ تابعی از x نیست

* فرض کنید μ تابعی از y باشد پس ← $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{M}$

$$\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{M_y - N_x}{M}\,dy = -\frac{3y^3 + 6x}{y^4 + 2xy}\,dy = -\frac{3(\cancel{y^3 + 2x})}{y(\cancel{y^3 + 2x})}\,dy \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{3}{y}\,dy$$

$\Rightarrow \ln\mu = -3\ln y \Rightarrow \mu = \frac{1}{y^3} \Rightarrow$ ضرب در دو طرف معادله $\Rightarrow \frac{y(2x+y^3)}{y^3}\,dx - \frac{x(2x-y^3)}{y^3}\,dy = 0$

معادله فوق کامل است ← آن را حل می کنیم ← $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} + y \to u = \frac{x^2}{y^2} + xy + h(y)$

Arman

$$\Rightarrow -\cancel{\frac{2x^2}{y^3}} + \cancel{x} + \frac{dh}{dy} = -\cancel{\frac{2x^2}{y^3}} + \cancel{x} \Rightarrow \frac{dh}{dy} = 0 \to h = c' \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + xy = C$$

Subject:

Year: Month: Date:

? تحت چه شرایطی معادله $Mdx+Ndy=0$ یک عامل انتگرال ساز تابعی از xy دارد؟

معادله $(x^4y^2-y)dx+(x^2y^3-x)dy=0$ را حل کنید؟

$$Mdx+Ndy=0 \Rightarrow \mu Mdx+\mu Ndy=0$$

$$\Rightarrow (\mu M)_y=(\mu N)_x \Rightarrow \mu_y M+\mu M_y+\mu_x N+N_x\mu=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}=\frac{M_y-N_x}{N\mu_x-M\mu_y} \Rightarrow \mu(xy) \Rightarrow t=xy \Rightarrow \mu_x=\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dt}\times\frac{\partial t}{\partial x}=y\frac{d\mu}{dt}$$

$$\mu_y=\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{dt}\times\frac{\partial t}{\partial y}=x\frac{d\mu}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu}=\frac{M_y-N_x}{Ny\frac{d\mu}{dt}-Mx\frac{d\mu}{dt}} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu}=\frac{M_y-N_x}{Ny-Mx}\,dt$$

شرط دارا بودن جواب ← $\frac{M_y-N_x}{Ny-Mx}$ باید تابعی از xy باشد.

تست دوم → $(x^4y^2-y)dx+(x^2y^3-x)dy=0$

$$\frac{M_y-N_x}{Ny-Mx}=\frac{2x^4y-1-2xy^3+1}{x^2y^4-xy-x^5y^2+xy}=\frac{2xy(x^3-y^2)}{x^2y^2(-x^3+y^2)}^{-1}=-\frac{2}{xy}\,dt$$

t

$$\Rightarrow \ln\mu=-2\ln t \Rightarrow \mu=t^{-2}=\frac{1}{t^2} \Rightarrow \mu_x \text{ ضرب معادله در } \Rightarrow \dots$$

Arman

Subject:

Year: Month: Date:

* معادله ریکاتی *

۹۶/۱۲/۶

معادله‌ای است به صورت $\frac{dy}{dx}=q_1(x)+q_2(x)y+q_3(x)y^2$. اگر یک جواب این معادله مانند y_1 داشته باشیم، جواب عمومی را به صورت $y=y_1+\frac{1}{v(x)}$ فرض می‌کنیم و با جایگذاری آن در معادله به یک معادله خطی برای $v(x)$ می‌رسیم.

$$\left(y_1'-\frac{v'}{v^2}\right)=q_1+q_2\left(y_1+\frac{1}{v}\right)+q_3\left(y_1^2+\frac{2y_1}{v}+\frac{1}{v^2}\right)$$

$$\Rightarrow v'=-q_2v-2q_3y_1v-q_3 \Rightarrow v'+(q_2+2y_1q_3)v=-q_3$$

یک معادله مرتبه اول خطی است که حل شده و $v(x)$ به دست می‌آید.

$$* \quad y=y_1+\frac{1}{v(x)} \quad *$$

? اگر $y=\frac{1}{x}$ یک جواب معادله زیر باشد، جواب عمومی آن را به دست آورید.

$$y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{y}{x}+y^2 \Rightarrow y=\frac{1}{x}+\frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{x^2}-\frac{v'}{v^2}\right)=-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{vx}\right)+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{v^2}+\frac{2}{vx}\right)$$

$\Rightarrow v'=\frac{v}{x}-1-\frac{2v}{x} \Rightarrow v'+\frac{v}{x}=-1 \Rightarrow$ معادله خطی مرتبه اول $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{x}+\frac{1}{v}$$

* معادله کلرو *

$y=xy'+f(y') \longrightarrow$ مثال $\longrightarrow y=xy'-e^{y'}$

Arman

Subject :

Year : Month : Date :

* روش حل ← فرض کنید $y' = z$ ← $y = xz + f(z)$ حال از طرفین آن مشتق می‌گیریم.

$$\cancel{y'} = \cancel{z} + x\frac{dz}{dx} + \frac{dz}{dx}f'(z) \Rightarrow \frac{dz}{dx}(x + f'(y)) = 0$$

* دو حالت پیش می‌آید ← ۱:

$$\frac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow z = c \Rightarrow y' = c$$

$$y = xz + f(z) \Rightarrow y = cx + f(c) \rightarrow \text{جواب عمومی}$$

۲:

$$x + f'(z) = 0 \rightarrow x = -f'(z)$$

$$y = xz + f(z) \Rightarrow y = -f'(z)\,z + f(z)$$

می‌توان با حذف z ، y را برحسب x به دست آورد یا همین جواب فوق، یک جواب پارامتریک است. این جواب، جواب خاص (ویژه) است.

? $y = xy' - e^{y'} \Rightarrow y' = z \Rightarrow y = xz - e^{z}$

$$\Rightarrow y' = z = z + \frac{dz}{dx}\times x - \frac{dz}{dx}e^{z} \Rightarrow \frac{dz}{dx}(x - e^{z}) = 0 \rightarrow \frac{dz}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow z = c \Rightarrow \boxed{y = xc - e^{c}} \rightarrow \text{جواب عمومی}$$

$$x - e^{z} = 0 \rightarrow e^{z} = x \Rightarrow y = xz - e^{z} \Rightarrow \begin{cases} x = e^{z} \\ y = xz - e^{z} \end{cases} \Rightarrow \text{می‌توانستید جواب صریح را پیدا کنید}$$

$$\Rightarrow y' = z = \ln x \rightarrow y = x\ln x - x \rightarrow \text{یک جواب خاص}$$

(چون عدد ثابت ندارد جواب عمومی نیست)

Subject :

Year : Month : Date :

$$y = x f(y') + g(y')$$

* معادله لاگرانژ *

روش حل ← مانند معادله کلرو ، $y' = z$ فرض می‌کنیم و از طرفین مشتق می‌گیریم.

$$\Rightarrow y = x f(z) + g(z) \Rightarrow y' = z = f(z) + \frac{dz}{dx} x f'(z) + \frac{dz}{dx} g'(x)$$

$$\Rightarrow z - f(z) = \frac{dz}{dx}\left(x f'(z) + g'(z)\right)$$

$z - f(z) = 0$ جواب خاص معادله است.

$$\frac{dx}{dz} - x\frac{f'}{z - f(z)} = \frac{g'}{z - f(z)} \rightarrow$$ یک معادله خطی مرتبه اول که x تابعی از z است.

? معادله زیر را حل کنید.

$$y = xy'^{2} + y'^{3} \Rightarrow y' = z \Rightarrow y = xz^{2} + z^{3}$$

$$\Rightarrow y' = z = z^{2} + x\left(\frac{dz}{dx}\right)(2z) + 3\left(\frac{dz}{dx}\right)(z^{2}) \Rightarrow z - z^{2} = \frac{dz}{dx}(2xz + 3z^{2})$$

$\Rightarrow z - z^{2} = 0 \Rightarrow$ جواب‌های ویژه (غیرعادی) $\Rightarrow z = 0 \ / \ z = 1$

$y = 0 \qquad y = x + 1 \rightarrow$ جواب خاص

$$\frac{dx}{dz} - x\left(\frac{2z}{z - z^{2}}\right) = \frac{3z^{2}}{z - z^{2}} \rightarrow$$ یک معادله خطی مرتبه اول که x برحسب z بدست می‌آید

$$\Rightarrow x = X(z) \Rightarrow y = xz^{2} + z^{3}$$

* خانواده خم‌ها و مسیرهای قائم *

مجموعه خم‌های $F(x,y,c)=0$ را خانواده خم‌های مربوط به پارامتر c می‌نامیم.

برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل حاکم بر خانواده خم، از طرفین آن مشتق می‌گیریم و پارامتر c را حذف می‌کنیم.

مثال $\rightarrow$ $x^2+y^2-c^2=0$ $\rightarrow$ مجموعه چند دایره

$\xRightarrow{\text{مشتق}} 2x+2yy'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$ $\rightarrow$ جواب این معادله دیفرانسیل، مجموعه‌ای از دایره‌هاست.

مثال $\rightarrow$ $x^2+(y-c)^2$ $\Rightarrow$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} 2x+2y'(y-c)=0$ $\rightarrow$ باید c را حذف کنیم

$$x^2+y^2-2cy+\cancel{c^2}=\cancel{c^2} \Rightarrow c=\frac{x^2+y^2}{2y} \Rightarrow 2x+2y'\left(y-\frac{x^2+y^2}{2y}\right)=0$$

$\Rightarrow y'=\frac{2xy}{y^2-x^2}$ $\Rightarrow$ جواب این معادله، مجموعه‌ای از خم‌هاست (دوایر)

* مسیرهای قائم *

برای به دست آوردن مسیرهای قائم یک خانواده خم، ابتدا معادله دیفرانسیل خانواده خم را به دست می‌آوریم.

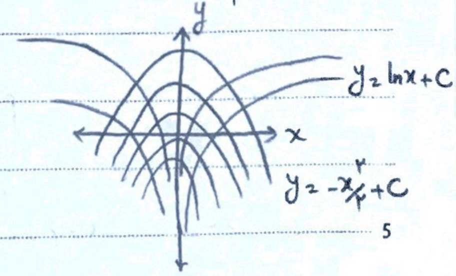
$y'=f(x,y)$

* معادله دیفرانسیل حاکم بر مسیرهای قائم، به صورت زیر خواهد بود:

$$y'=-\frac{1}{f(x,y)}$$

با حل معادله فوق مسیرهای قائم به دست می‌آید.

? مسیرهای قائم خانواده خم‌های $y = -\frac{x^2}{2} + c$ را به دست آورید.



$\xrightarrow{\text{شیب}} y' = -x \rightarrow$ معادله دیفرانسیل خم

$\Rightarrow y' = -(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \rightarrow$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \xrightarrow{\int} y = \ln|x| + c'$

? $y = ce^x \Rightarrow y' = ce^x \Rightarrow y' = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \ln y = x \rightarrow y = e^x$

$\Rightarrow y' = -\frac{1}{y} \Rightarrow y\,dy = -dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -x \Rightarrow \frac{y^2}{2} + x + c' = 0$

۹۴/۱۲/۸

*** معادلات مرتبه دوم ***

$\mathrm{I} \quad y'' = f(x, y, y')$

* قضیه ← اگر ناحیه‌ای ۳ بعدی شامل (x_0, y_0, y'_0) وجود داشته باشد که در آن f و f_y و $f_{y'}$ پیوسته باشند،

آن گاه معادله I در همسایگی نقطه x_0 دارای جوابی یکتا خواهد بود که شرایط اولیه داده شده را ارضا خواهد کرد.

چون معادله مرتبه ۲ است، ۲ ثابت در جواب ظاهر خواهد شد. پس نیاز به ۲ شرط اولیه هست.

* حل معادله غیرخطی مرتبه دوم در حالت کلی دشوار بوده و در حالت های بسیار خاص می‌توان برای آن پاسخ کلی پیدا کرد.

* حالت خاص برای معادلات غیرخطی *

* حالت خاص ۱ ← y وجود نداشته باشد ←

$$F(y'', y', x) = 0$$

$$\Rightarrow y' = u \Rightarrow y'' = \frac{du}{dx} \Rightarrow F\left(\frac{du}{dx}, u, x\right) = 0 \rightarrow$$ مرتبه اول

* حالت خاص ۲ ← x وجود نداشته باشد ←

$$F(y'', y', y) = 0$$

$$y' = u \Rightarrow y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy} \Rightarrow F\left(u\frac{du}{dy}, u, y\right) = 0 \rightarrow$$ مرتبه اول

؟ $xy'' + y' = 1 \quad x > 0$

$$y' = u \Rightarrow y'' = \frac{du}{dx} \Rightarrow xu' + u = 1 \rightarrow$$ مرتبه اول

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx} = 1 - u \Rightarrow \frac{du}{1-u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln(1-u) = \ln x + C \Rightarrow 1 - u = \frac{C}{x}$$

$$\Rightarrow u = 1 - \frac{C}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{C}{x} \Rightarrow y = \int\left(1 - \frac{C}{x}\right)dx = x - C\ln x + C'$$

؟ $y'' + y = 0 \rightarrow y' = u \Rightarrow y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \overset{u}{\cancel{\frac{dy}{dx}}} = u\frac{du}{dy}$ ، $y(0) = 0 \,/\, y'(0) = 1$ ← شرط اولیه

$$\Rightarrow u\frac{du}{dy} + y = 0 \Rightarrow u\,du = -y\,dy \overset{\int}{\Rightarrow} \frac{u^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1$$

$$\Rightarrow u^2 = C - y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{C - y^2} \underset{\substack{y=0 \\ y'=1}}{\overset{x=0}{\Rightarrow}} 1 = \pm\sqrt{C} \Rightarrow C = 1$$ ، رادیکال منفی حذف می‌شود

$$\Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \Rightarrow x + C = \int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{ArcSin} y \Rightarrow \sin(x + C) = y$$

$$\Rightarrow \sin(0 + C) = 0 \Rightarrow \sin C = 0 \rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow y = \sin x$$

Subject :
Year : Month : Date :

* معادلات خطی مرتبه دوم *

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \qquad \mathrm{I}$$

* اگر $g(x)=0$ باشد، معادله همگن نامیده می‌شود. $L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

* قضیه ← اگر توابع $p(x)$، $g(x)$ و $q(x)$ در بازه $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، آنگاه معادله I حتماً دارای جواب یکتایی است که در شرط اولیه $y(x_0)=y_0$ و $y'(x_0)=y'_0$ صدق می‌کند.

* هر معادله به فرم $y''=f(x,y,y')$ پس از حل دارای ۲ ثابت خواهد بود و هر معادله ای دارای ۲ ثابت باشد به صورت یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم قابل بیان خواهد بود.

? معادله دیفرانسیل حاکم بر دسته منحنی $y = c_1x + c_2\sin x$ را به دست آورید.

← دوبار مشتق گرفته و c_1 و c_2 را حذف می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = c_1x + c_2\sin x \\ y' = c_1 + c_2\cos x \\ y'' = -c_2\sin x \end{cases} \Rightarrow \dots$$

* قضیه ← اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله $L(y)=0$ باشند، هر ترکیب خطی آنها نیز جواب معادله خواهد بود.

* اثبات ←

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

$$\begin{array}{l} c_1\times \\ c_2\times \end{array}\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + qy_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + qy_2 = 0 \end{cases} \stackrel{+}{\Longrightarrow} (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$$

پس $c_1y_1 + c_2y_2$ نیز جواب معادله است. دقت کنید که این قضیه برای معادله I که ناهمگن است صادق نمی‌باشد (مگر در یک حالت خاص که $c_1+c_2=1$ در این صورت صادق خواهد بود).

Arman

Subject :
Year : Month : Date :

? نشان دهید e^{-2x} و e^{2x} دو پاسخ معادله $y''-4y=0$ می‌باشند و نتیجه بگیرید $\sinh 2x$ و $\cosh 2x$ نیز

جواب های معادله هستند.

$e^{2x} \longrightarrow 4e^{2x}-4e^{2x}=0 \checkmark$

$e^{-2x} \longrightarrow 4e^{-2x}-4e^{-2x}=0 \checkmark$

پس هر ترکیب خطی e^{2x} و e^{-2x} نیز جواب معادله است.

$\sinh 2x = \frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x} \Rightarrow$ چک می‌کنیم $\Rightarrow 4\sinh 2x - 4\sinh = 0$

? نشان دهید با اینکه $y=1$ و $y=\sqrt{x}$ دو جواب معادله زیری باشند ولی ترکیب خطی آنها جواب معادله نمی‌باشد.

$yy''+y'^2=0 \qquad \sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y''=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow -\frac{1}{4}x^{-1}+\frac{1}{4}x^{-1}=0 \checkmark$

$a\sqrt{x}+b \Rightarrow$ در معادله جای گذاری می‌کنیم صدق نمی‌کند $\Rightarrow$ چون معادله خطی نیست، قضیه صدق نمی‌کند

---

* $L(y)=0 \Rightarrow y''+p(x)y'+q(x)y=0$ ← فرض کنید دو پاسخ دلخواه این معادله مانند y_1 و y_2 را پیدا کرده‌ایم. می‌خواهیم

پاسخ معادله در شرط اولیه $y(x_0)=y_0$ و $y'(x_0)=y'_0$ صدق کند. می‌دانیم $y=c_1y_1+c_2y_2$ نیز پاسخ معادله است.

یعنی می‌کنیم c_1 و c_2 را طوری بیابیم که شرط اولیه برقرار شود. برای اینکه بتوانیم c_1 و c_2 را پیدا کنیم باید دترمینان ضرایب

$$w=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow y_1y'_2-y_2y'_1\neq 0 \qquad \begin{cases} c_1y_1(x_0)+c_2y_2(x_0)=y_0 \\ c_1y'_1(x_0)+c_2y'_2(x_0)=y'_0 \end{cases}$$

صفر نشود.

* دترمینان فوق با $W(y_1,y_2)$ نشان داده می‌شود و رونسکین y_1 و y_2 نامیده می‌شود.

Arman

Subject :

Year : Month : Date :

* اگر y_1 و y_2 در رابطه فوق صدق کنند ($W(y_1,y_2)\neq 0$) آنها را جواب های اساسی معادله می نامیم.

پس زمانی y_1 و y_2 جواب های اساسی معادله $L(y)=0$ هستند که بتوان با ترکیب خطی آنها به هر شرط اولیه دلخواه رسید که لازمه آن این است که $W(y_1,y_2)\neq 0$ باشد.

? آیا دو پاسخ e^{2x} و e^{-2x} پاسخ اساسی معادله $y''-4y=0$ هستند؟

$$W(e^{2x},e^{-2x}) = e^{2x}(-2e^{-2x}) - (2e^{2x})(e^{-2x}) = -4$$

چون $W\neq 0$ شد پس e^{2x} و e^{-2x} جواب های اساسی هستند (ضریبی از هم نیستند) و می توانم با ترکیب خطی آنها به هر شرط اولیه دلخواه برسم.

? تحقیق کنید که x و xe^x دو جواب معادله $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0$ هستند و بازه‌ای را تعیین کنید که این دو جواب جواب های اساسی معادله فوق باشند.

x و xe^x را در معادله قرار می‌دهیم $\Rightarrow$ صدق می‌کند

$W(x,xe^x)=x^2e^x \Rightarrow$ در هر بازه‌ای که شامل $x=0$ نباشد، این دو جواب، جواب های اساسی معادله هستند.

* قضیه ← اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله $L(y)=y''+py'+qy=0$ باشند، داریم:

$$W(y_1,y_2)=Ce^{\int^x -p(t)dt}$$

* اثبات ←

$$\begin{cases} y_2\times & y_1''+py_1'+qy_1=0 \\ -y_1\times & y_2''+py_2'+qy_2=0\end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} \underbrace{(y_2y_1''-y_1y_2'')}_{w'} + p\underbrace{(y_2y_1'-y_1y_2')}_{w}=0$$

$$\Rightarrow w'+pw=0 \to w=Ce^{\int^x -p(t)dt}$$

Subject:
Year: Month: Date:

? اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله $y''-4y=0$ باشند. $W(y_1,y_2)$ را بیابید.

رونسکین y_1 و y_2، یک عدد ثابت است $\rightarrow$ $W(y_1,y_2)=ce^{\int^x -p(t)dt}=c$

اگر $\sinh 2x$ ، $\cosh 2x$ باشند $\Rightarrow W(y_1,y_2)=2$ / اگر e^{2x} و e^{-2x} باشند $\Rightarrow W(y_1,y_2)=-4$

اگر e^{2x} و $2e^{2x}$ باشند (یعنی ضریب دیگری است) $\rightarrow W=0 \rightarrow$ جواب اساسی نیستند (به هم وابسته هستند)

? رونسکین $x^2y''-x\frac{(x+2)}{x}y'+\frac{(x+2)}{x^2}y=0$ ؛

$$W=ce^{-\int^x p(t)\,dt}=ce^{-\int -\frac{x+2}{x}dx}$$

$$\Rightarrow W=ce^{x+2\ln x}=c(e^x\times e^{\ln x^2})=cx^2e^x$$

*** استقلال خطی ***

دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در بازه‌ی $\alpha<x<\beta$ وابسته خطی گویند هرگاه دو ثابت c_1 و c_2 (نه هر دو با هم صفر) نیز وجود داشته باشند به طوری که $\leftarrow c_1f(x)+c_2g(x)=0$

* قضیه $\leftarrow$ اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ مشتق‌پذیر باشند و اگر نقطه‌ای مانند x_0 در بازه‌ی (α,β) وجود داشته باشد که $W(x_0)\neq 0$ آن‌گاه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ مستقل‌اند و اگر $f(x)$ و $g(x)$ وابسته باشند، $W(f,g)$ به ازای هر x ای در بازه‌ی (α,β) صفر خواهد بود (در آن بازه صفر خواهد بود)

Subject:
Year: Month: Date:

* اثبات ← اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ وابسته باشند ← $c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$

$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} c_1 f'(x) + c_2 g'(x) = 0 \Rightarrow$ معادله فوق به شرطی دارای جواب غیرصفر است که دترمینان ضرایب که همان $W(f,g)$ است برابر صفر باشد.

* $f(x)$ و $g(x)$ جواب های اساسی یک معادله مرتبه ۲ خطی همگن هستند هرگاه نقطه‌ای مانند x_0 وجود داشته باشد که $W(f,g)(x_0) \neq 0$ ($f(x)$ و $g(x)$ مستقل باشند)

* روش های حل معادله مرتبه ۲ *

۱- روش کاهش مرتبه ← فرض کنید y_1 یک جواب معادله $L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد. می‌خواهیم جواب مستقل دوم این معادله را پیدا کنیم. فرض می‌کنیم $y_2(x) = u(x)y_1$ و با جایگذاری آن در معادله سعی می‌کنیم $u(x)$ را بدست آوریم.

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad y_2 = uy_1 \Rightarrow y_2' = u'y_1 + uy_1'$$

$$\Rightarrow y_2'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \Rightarrow$$ در معادله جایگذاری و مرتب می‌کنیم.

$$\Rightarrow u(\underbrace{\cancel{y_1'' + py_1' + q(y_1)}}_{L(y_1)=0}) + u''y_1 + u'(2y_1' + py_1) = 0 \Rightarrow \frac{u''}{u'} = -\frac{2y_1'}{y_1} - p$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} \ln u' = -2\ln(y_1) - \int p(x)\,dx \Rightarrow u' = e^{-2\ln y_1} \times e^{-\int p(x)dx} = y_1^{-2} \times e^{-\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow u' = \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}$$

با انتگرال گیری $U(x)$ را بدست آورده و سپس $y_2 = U(y_1)$ ← $U' = \dfrac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} = \dfrac{W(y_1,y_2)}{y_1^2}$

نکته → $U' = \left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = \dfrac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} = \dfrac{W(y_1,y_2)}{y_1^2}$

? اگر $y=x$ یک جواب معادله زیر باشد. جواب مستقل دیگر را پیدا کنید.

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$$

$$\Rightarrow y_2 = U(x)y_1 \Rightarrow y_2 = U(x)\times x \Rightarrow y_2' = U + U'x \Rightarrow y_2'' = 2U' + U''x$$

$$\Rightarrow x^2(2U' + U''x) + \cancel{2x(U+U'x)} - \cancel{2(Ux)} = 0 \Rightarrow x^3U'' + 4x^2U' = 0$$

$$\Rightarrow \frac{U''}{U'} = -\frac{4}{x} \Rightarrow \ln U' = -4\ln x \Rightarrow U' = x^{-4} \Rightarrow U = -\frac{1}{3x^3} \Rightarrow y_2 = U\times y_1$$

$\Rightarrow y_2 = -\dfrac{1}{3x^2}$ → جواب مستقل دیگر $\Rightarrow y = c_1x + \dfrac{c_2}{x^2}$ → جواب عمومی معادله

۲- معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت ←

$$ay'' + by' + cy = 0$$

فرض می کنیم جواب معادله e^{rx} باشد. (r فقط محدود به اعداد حقیقی نیست و می تواند مختلط باشد) با جایگذاری آن در معادله داریم

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow \underbrace{e^{rx}}_{\neq 0}(ar^2 + br + c) = 0$$

$\Rightarrow ar^2 + br + c = 0 \Rightarrow$ سه حالت پیش می آید

۱- دو جواب حقیقی متمایز $r_1 \neq r_2$

۲- یک ریشه مضاعف $r_1 = r_2 = r$

۳- ریشه های مختلط $\begin{cases} r_1 = \lambda + \mu i \\ r_2 = \lambda - \mu i \end{cases}$

Subject :

Year : Month : Date :

حال این ۳ حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول ← دو جواب به دست می‌آید ← $\begin{cases} y_1 = e^{r_1 x} \\ y_2 = e^{r_2 x} \end{cases}$ ← برای اطمینان از اساسی بودن جواب‌ها،

$W(y_1, y_2)$ را حساب می‌کنیم. $W(y_1,y_2) = (\quad + e^{r_2 x}) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \end{vmatrix}$

$\Rightarrow W(y_1,y_2) = (r_2 - r_1)\, e^{(r_2 + r_1)x} \rightarrow$ چون $r_1 \neq r_2$، پس $W(y_1,y_2)$

تابع صفر نشد پس y_1 و y_2 مستقلند.

? $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 5$ $\qquad e^{rx} = y$

$\Rightarrow r^2 e^{rx} - r e^{rx} - 2e^{rx} = 0 \Rightarrow r^2 - r - 2 = 0 \Rightarrow r = 2, -1$

$\Rightarrow y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 4 \rightarrow C_1 + C_2 = 4 \\ y'(0) = 5 \rightarrow 2C_1 - C_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3 , C_2 = 1 \Rightarrow \boxed{y = 3e^{2x} + e^{-x}}$

حالت دوم ← در این صورت فقط یک جواب به دست می‌آید (e^{rx}). $\qquad ay'' + by' + cy = 0$

با استفاده از روش کاهش مرتبه جواب دوم را به دست می‌آوریم. $\qquad u' = \frac{W(y_1, y_2)}{y_1^2}$

$\Rightarrow u' = \frac{e^{-\int \frac{b}{a} dx}}{(e^{-\frac{b}{2a}x})^2} = \frac{e^{-\frac{b}{a}x}}{e^{-\frac{b}{a}x}} = 1 \Rightarrow u' = x \Rightarrow y_2 = x y_1 = x e^{rx}$

$\Rightarrow y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$, $r = -\frac{b}{2a}$

(ریشه مضاعف معادله)

$\Rightarrow r_1 = r_2 = r \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{rx} \\ y_2 = x e^{rx} \end{cases}$

Subject:
Year: Month: Date:

? $y''+8y'+16y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=1$

$r^2+8r+16=0 \rightarrow r=-4$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1=e^{-4x} \\ y_2=xe^{-4x} \end{cases} \Rightarrow y=C_1e^{-4x}+C_2xe^{-4x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0)=3 \Rightarrow -C_1=-3 \\ y'(0)=1 \Rightarrow -4C_1-C_2=1 \Rightarrow C_2=13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y=-3e^{4x}+13xe^{4x}$$

۱۲،۱۴

* قضیه ← در معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ و $p(x)$ و $q(x)$ توابع حقیقی هستند، اگر $h(x)=f(x)+ig(x)$ (تابع مختلط) جواب معادله باشند. $f(x)$ و $g(x)$ نیز جواب معادله خواهند بود.

* اثبات ← $[f(x)+ig(x)]''+p(x)[f(x)+ig(x)]'+q(x)(f(x)+ig(x))=0$

$$\Rightarrow f''(x)+ig''(x)+p(x)f'(x)+ip(x)g'(x)+q(x)f(x)+ip(x)g(x)=0$$

$$\rightarrow [f''+p(x)f'+q(x)f]+i[g''+p(x)g'+q(x)g]=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''+pf'+qf=0 \\ g''+pg'+qg=0 \end{cases}$$ → پس هم $f(x)$ و هم $g(x)$ هردو جواب معادله هستند.

حالت سوم ← $r_1=\lambda+\mu i$, $r_2=\lambda-\mu i$ / $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

جواب معادله $\Rightarrow e^{(\lambda+\mu i)x}=e^{\lambda x}\times e^{\mu ix}=e^{\lambda x}(\cos\mu x+i\sin\mu x)$

طبق قضیه قبلی قسمت حقیقی و موهومی عبارت فوق پاسخ معادله است پس:

$y_1=e^{\lambda x}\cos\mu x$

$y_2=e^{\lambda x}\sin\mu x$

Arman

? $y''+4y'+5y=0 \Rightarrow e^{rx} \Rightarrow r^2+4r+5=0 \Rightarrow (r+2)^2=-1 \Rightarrow r=-2\pm i \Rightarrow \begin{cases}\lambda=-2\\ \mu=1\end{cases}$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y_1=e^{-2x}\cos x\\ y_2=e^{-2x}\sin x\end{array}\right\} \Rightarrow y=c_1e^{-2x}\cos x+c_2e^{-2x}\sin x=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0)=1\\ y'(0)=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1=1\\ c_2=2\end{cases} \Rightarrow y=e^{-2x}(\cos x+2\sin x)$$

* گاهی می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب یک معادله با ضرایب غیرثابت را به معادله با ضرایب ثابت تبدیل کرد. معادله

$y''+p(x)y'+q(x)y=0$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم تغییر متغیر $z=\varphi(x)$ را اعمال کرده و بررسی کنیم که تحت چه شرایطی این معادله به ضرایب ثابت تبدیل می‌شود.

$z=\varphi(x)$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right)=\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)}_{\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dx}}\cdot\frac{dz}{dx}+\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\cdot\frac{dz}{dx} \leftarrow \frac{d^2y}{dz^2}$$

$$\Rightarrow y''=\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} \Rightarrow$$ جایگذاری در معادله

$$\Rightarrow \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{dy}{dz}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+p\left[\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\right]+q(x)y=0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2}+\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+p\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\times\frac{dy}{dz}+\frac{q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}y=0$$

فرض می‌کنیم $\frac{q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=1$ پس:

$$\frac{dz}{dx}=\sqrt{q} \Rightarrow z=\int\sqrt{q}\,dx$$

Subject
Date

این شرط نیز وجود دارد که ضریب $\frac{dy}{dz}$ نیز ثابت شود پس :

$$\frac{\frac{d^2z}{dx^2}+p\frac{dz}{dx}}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \frac{\frac{q'}{2\sqrt{q}}+\sqrt{q}\times p}{q} = \frac{q'+2pq}{2q^{\frac{3}{2}}} = c$$

* ابتدا عبارت $\frac{q'+2pq}{2q^{\frac{3}{2}}}$ را حساب می کنیم ، اگر عدد ثابت شد ، اطمینان داریم تغییر متغیر $z=\int\sqrt{q}\,dx$ معادله را به یک معادله ضریب ثابت تبدیل خواهد کرد.

$$* \quad \frac{d^2y}{dz^2}+c\frac{dy}{dz}+y=0 \quad *$$

? $xy''+(x^2-1)y'+x^3y=0$ $\qquad p=\frac{x^2-1}{x}$ $\qquad q=x^2$

$\Rightarrow \frac{q'+2pq}{2q^{\frac{3}{2}}} = \frac{2x+2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)(x^2)}{2x^3} = 1 \rightarrow$ پس تغییر متغیر $z=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}$ مناسب است.

$\Rightarrow y''+y'+y=0 \rightarrow$ y برحسب z به دست می آید ، به جای z ، $\frac{x^2}{2}$ قرار می دهیم.

* اگر $q(x)$ منفی باشد می توان تغییر متغیر $z=\int\sqrt{-q}\,dx$ را اعمال کرد. ($\frac{q}{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}=-1$ فرض می کنیم) پس اگر در بازه مورد نظر $q(x)$ تغییر علامت ندهد می توان این روش استفاده کرد.

* معادله مرتبه دوم خطی ناهمگن *

$$(1) \quad y''+p(x)y'+q(x)y=g(x)$$

* قضیه ← اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله (1) باشند ، پس تفاضل آنها جواب معادله همگن می باشد.

$$\begin{aligned} y_1''+py_1'+qy_1&=g(x)\\ y_2''+py_2'+qy_2&=g(x)\end{aligned} \Rightarrow (y_1-y_2)''+p(y_1-y_2)'+q(y_1-y_2)=0$$

* قضیه ← اگر y_p یک جواب معادله ناهمگن (1) باشد آن گاه هر جواب معادله (1) با هر دو شرط اولیه دلخواه به صورت زیر قابل بیان است.

$\phi(x)=y_p+c_1y_1+c_2y_2 \rightarrow$ که y_1 و y_2 جواب های معادله همگن هستند.

Subject
Date

* اثبات ← چون y_p و $\phi(x)$ دو جواب برای معادله (۱) می باشند طبق قضیه قبلی $\phi(x)-y_p$ یک جواب برای معادله همگن

است طبق قضایای قبلی هر جواب معادله همگن را می توان به صورت $c_1y_1+c_2y_2$ نوشت. $(\phi(x)-y_p)=\underbrace{c_1y_1+c_2y_2}_{y_c}$

$\Rightarrow \phi(x)=y_p+c_1y_1+c_2y_2$ ‏ c_1 و c_2 از شرط اولیه مسئله به دست می آییم $\Rightarrow \underbrace{\phi(x)}_{\text{جواب عمومی}}=y_c+y_p$

جواب معادله همگن $c_1y_1+c_2y_2$ ؛ y_p ← جواب خصوصی

* برای حل معادله ناهمگن : ۱_ معادله همگن را حل کرده و y_1 و y_2 را به دست می آوریم.

۲_ یک جواب برای معادله ناهمگن (y_p) به دست می آوریم.

۳_ جواب عمومی معادله ناهمگن ← $y=c_1y_1+c_2y_2+y_p$

* روش به دست آوردن y_p ← ضرایب نامعین
← تغییر پارامترها

ضرایب نامعین ← زمانی استفاده می شود که معادله ضرایب ثابت باشد.

$g(x)$	y_p
$P_n(x)=a_0x^n+\dots+a_n$	$x^s(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_n)$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$e^{\alpha x}x^s(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_n)$
$P_n e^{\alpha x}\sin\mu(x)$ $\cos x$ $\sin x+\cos x$ $c_1\sin\mu(x)+c_2\cos\mu(x)$	$e^{\alpha x}x^s[(A_0x^n+\dots+A_n)\sin\mu(x)+(B_0x^n+\dots+B_n)\cos\mu(x)]$

* s کوچکترین عدد صحیحی است که y_p با y_1 و y_2 ترم مشترک نداشته باشد *

$s=0,1,2,3,\dots$

$y''+y'=e^x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

حل معادله همگن ← $y''+y'=0 \Rightarrow r^2+r=0 \to r=0,-1 \Rightarrow y_1=1,\ y_2=e^{-x}$

یافتن y_p ← چون ضرایب ثابت است و سمت راست از ترم های موجود در جدول است می توان از روش ضرایب نامعین استفاده کرد. $\Rightarrow y_p=Ax^se^x \Rightarrow s=0 ✓ \Rightarrow y_p=Ae^x$

با جایگذاری در معادله، ضرایب را تعیین می کنیم

Subject :

Year : Month : Date :

$$\Rightarrow y'' + y' = e^x \Rightarrow 2Ae^x = e^x \Rightarrow A = 1/2 \Rightarrow y_p = \frac{1}{2}e^x \Rightarrow y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2$$

$$\Rightarrow y = 1/2\, e^x + c_1 + c_2e^{-x}$$

c_1 و c_2 از شرایط اولیه به دست می آیند ←

$$\begin{cases} y(0) = 0 \rightarrow c_1 + c_2 = -1/2 \\ y'(0) = 0 \rightarrow 1/2 - c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 1/2 \Rightarrow c_1 = -1 \Rightarrow y = 1/2\, e^x + 1/2\, e^{-x} - 1 \end{cases}$$

* به خاطر دو محدودیت اساسی که روش ضرایب نامعین دارد، ما برای برخی معادلات نمی‌توان از این روش استفاده کرد. زمانی که ضرایب معادله ثابت نباشد یا سمت راست معادله از ترم های موجود در جدول نباشد (مثلاً $\tan x$ ، $\frac{1}{x}$ ، $\ln x$ ، ....)

در این صورت از روش تغییر پارامترها استفاده می شود مزایای که با تغییر متغیر مناسب بتوان شرایط ضرایب نامعین را فراهم سازید

تغییر پارامترها ← معادله به فرم $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ را در نظر بگیرید. ابتدا معادله همگن را حل کرده، پاسخ آن را به دست می آوریم (y_1 و y_2). فرض می کنیم جواب خصوصی به صورت $y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$ باشد.

سعی می کنیم با جایگذاری y_p در معادله، $u_1(x)$ و $u_2(x)$ را بیابیم.

$$y_p = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$$

$$y' = u_1y_1' + u_2y_2' + \underbrace{u_1'y_1 + u_2'y_2}_{A}$$

در مشتق بعدی عبارت A شامل ترم های u_1'' و u_2'' خواهد بود، لذا این ترم را برابر صفر قرار می دهیم. $(I)\ u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$

$$\Rightarrow y_p'' = y_1''u_1 + y_1'u_1' + y_2''u_2 + y_2' + u_2'$$

با جایگذاری y_p ، y_p' ، y_p'' در معادله به فرم زیر می رسیم.

* به معادله فوق می رسیم.

$$\begin{cases} u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x) \\ u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{روش کرامر}} \begin{cases} u_1' = \dfrac{\overbrace{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ g(x) & y_2' \end{vmatrix}}^{W_1}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \dfrac{-y_2\, g(x)}{W} \\[2ex] u_2' = \dfrac{\overbrace{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & g(x) \end{vmatrix}}^{W_2}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \dfrac{y_1\, g(x)}{W} \end{cases}$$

$W \to$ رونسکین y_1 و y_2

$\Rightarrow$ فرمول کلی $\to$ $u_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}\, g(x) = \dfrac{W_1}{W}\, g(x)$

$W_n \leftarrow$ در ستون nام رونسکین، برابر $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ را قرار دهید.

* برای مراتب بالاتر $\leftarrow$ $U_m' = \dfrac{W_m}{W}\, g(x)$

؟ $y'' + 4y' + 4y = x^2 e^{-2x}$

به خاطر ترم x^{-2} نمی توان از روش ضرایب نامعین استفاده کرد.

از روش تغییر پارامترها استفاده می کنیم.

$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$

$u_1' = \dfrac{W_1}{W}\, g(x) \qquad u_2' = \dfrac{W_2}{W}\, g(x) \qquad W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

$y'' + 4y + 4 = 0$

حال باید y_1 و y_2 (به جواب های معادله همگن هستند) بیابیم.

چون ضرایب ثابت است $\to y = e^{rx} \to r = -2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-2x} \\ y_2 = xe^{-2x} \end{cases}$

$\Rightarrow u_1' = \dfrac{W_1}{W}\, g(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}\, g(x) = \dfrac{-y_2\, g(x)}{W} \Rightarrow W = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & -2xe^{-2x} + e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}$

$$\Rightarrow u_1' = \frac{(-xe^{-2x})(x^{-2}e^{-2x})}{e^{-4x}} = -x^{-1} \Rightarrow u_1' = -\frac{1}{x} \Rightarrow u_1 = -\ln x$$

$$\rightarrow u_2' = \frac{y_1 g(x)}{W} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow u_2 = -1/x \Rightarrow y_p = -\ln x\, y_1 - \frac{1}{x} y_2$$

$$\Rightarrow y_p = -\ln x\, e^{-2x} - e^{-2x} \Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$$

جواب خصوصی

$$\Rightarrow y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - \ln x\, e^{-2x} - e^{-2x}$$

؟ اگر $\underbrace{x^{-2}}_{y_1}$ و $\underbrace{x^{-3}}_{y_2}$ جواب های معادله $x^2y'' + 7xy' + 5y = 0$ باشند جواب معادله زیر را پیدا کنید

$$x^2y'' + 7xy' + 5y = x \qquad y(1) = 1 ,\ y'(1) = 0$$

$$\rightarrow y'' + \frac{7}{x}y' + \frac{5}{x^2}y = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow u_1' = \frac{-x^{-3} \times 1/x}{\begin{vmatrix} x^{-2} & x^{-3} \\ -2x^{-3} & -3x^{-4} \end{vmatrix}} = \frac{-x^{-4}}{-3x^{-6} + 2x^{-6}} = x^2 \rightarrow u_1 = \frac{x^3}{3}$$

$$u_2' = \frac{+x^{-2} \times \frac{1}{x}}{-x^{-6}} = -x^3 \Rightarrow u_2 = -\frac{x^4}{4}$$

$$\Rightarrow y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} + \frac{x}{12}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{12} = 1 \\ -2c_1 - 3c_2 + \frac{1}{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = -3/4 \\ c_1 = \frac{20}{12} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = -\tfrac{3}{4}x^{-2} + \tfrac{5}{3}x^{-3} + x/12}$$

Subject :

Year : Month : Date :

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$$ * معادله اویلر *

* روش اول ← تغییر متغیر $z = \ln x$ این معادله را به یک معادله ضرایب ثابت تبدیل می‌کند.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dz}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dz}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)}_{\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx},\ \frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}}$$

$$* \quad \frac{d}{dx}A = \frac{dA}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} \quad *$$

$$\Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}$$

$$\Rightarrow ax^2\left(\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}\right) + bx\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right) + cy = 0$$

$$\Rightarrow a\frac{d^2y}{dz^2} - a\frac{dy}{dz} + b\frac{dy}{dz} + cy = 0 \xrightarrow{a=1} \frac{d^2y}{dz^2} + (b-1)\frac{dy}{dz} + cy = 0$$

یک معادله ضرایب ثابت است که به راحتی حل می‌شود و در نهایت به جای z، $\ln x$ قرار می‌دهیم.

* روش دوم ← فرض می‌کنیم جواب معادله $y = x^r$ باشد، جایگذاری می‌کنیم.

$$x^2(r)(r-1)x^{r-2} + bx(rx^{r-1}) + cx^r = 0 \Rightarrow x^r(r^2 - r + br + c) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + (b-1)r + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 \\ r_2 \end{cases}$$ سه حالت پیش می‌آید

حالت اول ← $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y_1 = x^{r_1},\ y_2 = x^{r_2}$

$(e^{r_1 z} = e^{r_1 \ln x} = e^{\ln x^{r_1}} = x^{r_1})$ ((روش عملی $(z = \ln x)$)

Arman

Subject :
Year : Month : Date :

$$r_1 = r_2 = r \rightarrow \begin{cases} y_1 = x^r \\ \text{با روش کاهش مرتبه} \rightarrow y_2 = \ln x \times x^r \end{cases}$$ ← حالت دوم

$$ze^{rz} = ze^{r\ln x} = ze^{\ln x^r} = \ln x\, x^r$$ (روش قبلی) $(z = \ln x)$

$$\begin{cases} r_1 = \lambda + \mu i \\ r_2 = \lambda - \mu i \end{cases} \Rightarrow x^{r_1} = x^{\lambda + \mu i} = x^\lambda x^{\mu i}$$ ← حالت سوم

$$\Rightarrow x^\lambda (e^{\ln x^{\mu i}}) = x^\lambda (e^{(\ln x)i}) = x^\lambda (\cos \mu \ln x + i \sin \mu \ln x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = x^\lambda \cos \mu \ln x \\ y_2 = x^\lambda \sin \mu \ln x \end{cases}$$

(روش قبلی) $(z = \ln x)$

$$y_1 = e^{\lambda z} \cos \mu z = e^{\lambda \ln x} \cos \mu \ln x = x^\lambda \cos \mu \ln x$$

$$y_2 = e^{\lambda z} \sin \mu z = \ldots$$

؟ $x^2 y'' + 7xy' + 5y = 0 \rightarrow$ روش ۱ $\rightarrow y = x^r$

$$\Rightarrow x^2 (r(r-1)) x^{r-2} + 7x(r)(x^{r-1}) + 5x^r = 0 \rightarrow x^r (r^2 - r + 7r + 5) = 0 \rightarrow r^2 + 6r + 5 = 0$$

$$\Rightarrow r = -1, -5 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = x^{-1} \\ y_2 = x^{-5} \end{cases} \Rightarrow$$ جواب های معین

روش ۲ $\rightarrow z = \ln x \Rightarrow \ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 0 \Rightarrow y = e^{rz}$

$$r^2 + 6r + 5 = 0 \rightarrow r = -1, -5 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{-z} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} \\ y_2 = e^{-5z} = e^{-5\ln x} = e^{\ln x^{-5}} = x^{-5} \end{cases}$$

Arman

Subject :

Year :　Month :　Date :

$x^2y'' + 3xy' + 2y = 0 \xrightarrow{\text{روش اول}} y = x^r \longrightarrow \dots \Rightarrow x^r(r^2+2r+2) = 0 \to (r+1)^2 = -1 \to \begin{cases} r_1 = -1+i \\ r_2 = -1-i \end{cases}$ *

$\xrightarrow{\text{روش دوم}} z = \ln x \longrightarrow \dots \Rightarrow y = x^{-1+i} = \dots = x^{-1}\cdot(\cos\ln x + i\sin\ln x)^2$

$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{x}\cos\ln x \quad , \quad y_2 = \frac{1}{x}\sin\ln x$

* معادلات مرتبه بالاتر *

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)\,y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = g(x)$$

n شرط اولیه لازم دارد $\Rightarrow y(x_0) = y_0 \,,\, y'(x_0) = y'_0 \,,\, \dots \,,\, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$

* قضیه ← اگر توابع $p_1(x)$ تا $p_n(x)$ پیوسته باشند، معادله فوق همراه با شرایط اولیه داده شده قطعاً دارای جواب یکتاست.

* اگر توابع p_1 تا p_n پیوسته باشند و y_1 تا y_n جواب های معادله همگن ($g(x) = 0$) باشند، اگر $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ در یک نقطه مانند x_0 مخالف صفر باشد، آنگاه y_1 تا y_2 جواب های اساسی معادله هستند.

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

? آیا 1 ، $\sin x$ ، $\cos x$ جواب های اساسی معادله زیر هستند؟

$$y''' + y' = 0$$

$$W(1, \sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin x & \cos x \\ 0 & \cos x & -\sin x \\ 0 & -\sin x & -\cos x \end{vmatrix} = -1 \to \text{مستقل} \to \text{جواب های اساسی هستند}$$

همگی وابسته اند ← $W(\cos 2x, \cos^2 x, 7) = 0$

$W(\sin^2 x, \cos^2 x, 1) = 0$ / $W(2x+1, x, 5) = 0$ /

Arman

Subject :

Year : Month : Date :

* روش کاهش مرتبه (برای معادلات همگن) ← می‌توان به راحتی نشان داد اگر y_1 یک جواب معادله $y^{(3)}+p_1(x)y''+p_2(x)y'+p_3y=0$

باشد، برای پیدا کردن جواب های دیگر کافی است $y=u(x)y_1$ را در معادله جایگذاری کنیم و به یک معادله مرتبه ۲ برای $u(x)$ خواهیم رسید.

? اگر $y=x$ یک جواب معادله زیر باشد، جواب دیگر را بدست آورید: $x^3y^{(3)} - 3x^2y'' + 6xy' - 6y=0$

$y=ux \Rightarrow y'=u'x+u \Rightarrow y''=u''x+2u' \Rightarrow y'''=u'''x+3u''$

$\Rightarrow x^3(u'''x+3u'') - 3x^2(u''x+2u') + 6x(u'x+u) - 6ux = 0$

$\Rightarrow x^4u^{(3)}=0 \Rightarrow u'''=0 \Rightarrow u''=c_1 \rightarrow u'=c_1x+c_2 \rightarrow u=c_1x^2+c_2x+c_3$

$\Rightarrow y=c_1x^3+c_2x^2+c_3x$

* ضرایب ثابت * $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\dots+a_ny=0$

همانند فصل قبل، $y=e^{rx}$ در نظر می‌گیریم. $r^n+a_1r^{n-1}+\dots+a_n=0$

به چند نکته باید توجه کنیم ← یک ریشه حقیقی مانند r، s بار تکرار شود $\underbrace{r,r,r,\dots,r}_{s\ \text{بار}}$

جواب‌ها = $e^{rx},\ xe^{rx},\ x^2e^{rx},\dots,x^{s-1}e^{rx}$

اگر ریشه $r=\lambda\pm\mu i$، s بار تکرار شود.

جواب‌ها: $\begin{cases} e^{\lambda x}\cos\mu x \\ e^{\lambda x}\sin\mu x \end{cases}$ ، $\begin{cases} xe^{\lambda x}\cos\mu x \\ xe^{\lambda x}\sin\mu x \end{cases}$ ، ... ، $\begin{cases} x^{s-1}e^{\lambda x}\cos\mu x \\ x^{s-1}e^{\lambda x}\sin\mu x \end{cases}$

Arman

Subject:

Year: Month: Date:

؟ $y^{(3)} - y'' - y' + y = 0 \Rightarrow y = e^{rx} \rightarrow r^3 - r^2 - r + 1 = 0 \rightarrow r^2(r-1) - (r-1) = (r-1)(r^2-1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ r=1 \\ r=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x \\ xe^x \\ e^{-x} \end{cases} \Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x}$$

؟ $y^{(4)} - 8y' = 0 \rightarrow r^4 - 8r = 0 \rightarrow \begin{cases} r=0 \\ r=2 \end{cases}$ $r^3 - 8 = 0 \rightarrow (r-2)(r^2+2r+4) = 0$

$\Rightarrow r = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{3}\, i}{2}$

$\Rightarrow r = -1 \pm \sqrt{3}\, i$

$$\Rightarrow \begin{cases} r=0 \\ r=2 \\ r=-1+i\sqrt{3} \\ r=-1-i\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = e^{2x} \\ y = e^{-x}\sin\sqrt{3}\,x \\ y = e^{-x}\cos\sqrt{3}\,x \\ y = 1 \quad (r=0) \end{cases}$$

* معادله اویلر * (کوشی اویلر)

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

$\Rightarrow y = x^r$ جواب را فرض می کنیم $\rightarrow F(r) \times x^n = 0 \Rightarrow F(r) = 0$

$\Rightarrow$ ریشه ها $= r_1, r_2, \dots, r_n$

* اگر ریشه r، s بار تکرار شود، جواب ها به صورت زیر خواهند بود.

$y = x^r, \ln x (x^r), (\ln x)^2 (x^r), \dots$

* فرض کنید $r = \lambda \pm \mu i$، s بار تکرار شود. $2s$ جواب متناظر با آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} x^\lambda \cos \mu \ln x \\ x^\lambda \sin \mu \ln x \end{cases}, \begin{cases} x^\lambda (\ln x) \cos \mu \ln x \\ x^\lambda (\ln x) \sin \mu \ln x \end{cases}, \dots, \begin{cases} x^\lambda (\ln x)^{s-1} \cos \mu \ln x \\ x^\lambda (\ln x)^{s-1} \sin(\mu \ln x) \end{cases}$$

Arman

Subject :
Year : Month : Date :

؟ $y''' + y' = \sec x \ , \ -\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲} \ , \ y(۰) = ۲ \ / \ y'(۰) = ۱ \ / \ y''(۰) = -۲$

* همگن را حل می‌کنیم ← $y_۱ \ , \ y_۲ \ , \ y_۳$ / از رابطه $U'_m = \frac{W_m}{W} g(x)$ ، U ها را پیدا می‌کنیم.

$$y = y_c + y_p \quad / \quad y_p = U_۱ y_۱ + U_۲ y_۲ + \cdots + U_n y_n$$

$$\Rightarrow y''' + y' = ۰ \Rightarrow r^۳ + r = ۰ \rightarrow \begin{cases} r = ۰ \Rightarrow y_۱ = ۱ \\ r = i \Rightarrow y_۲ = \cos x \\ r = -i \Rightarrow y_۳ = \sin x \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} ۱ & \cos x & \sin x \\ ۰ & -\sin x & \cos x \\ ۰ & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = ۱ \, (\cancel{+\cos^۲ x + \sin^۲ x})^{+۱} = +۱$$

$$W_۱ = \begin{vmatrix} ۰ & \cos x & \sin x \\ ۰ & -\sin x & \cos x \\ ۱ & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = ۱ \qquad W_۲ = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & \sin x \\ ۰ & ۰ & \cos x \\ ۰ & ۱ & -\sin x \end{vmatrix} = -\cos x$$

$$W_۳ = \begin{vmatrix} ۱ & \cos x & ۰ \\ ۰ & -\sin x & ۰ \\ ۰ & -\cos x & ۱ \end{vmatrix} = -\sin x$$

$$\Rightarrow U'_۱ = \frac{W_۱}{W} g(x) = \frac{۱}{۱} \sec x \rightarrow U_۱ = \int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$$

$$U'_۲ = \frac{W_۲}{W} g(x) = -\cos x \times \frac{۱}{\cos x} \rightarrow U_۲ = \int -۱ \, dx = -x$$

$$U'_۳ = \frac{W_۳}{W} g(x) = -\sin x \times \frac{۱}{\cos x} \rightarrow U_۳ = \int -\operatorname{tg} x \, dx = \ln|\cos x|$$

Arman $\Rightarrow y_p = U_۱ y_۱ + U_۲ y_۲ + U_۳ y_۳ \rightarrow y = y_p + y_c$

$$\Rightarrow y = C_۱ + C_۲ \cos x + C_۳ \sin x + \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| - x \cos x + (\ln|\cos x|) \sin x$$

Subject :

Year :   Month :   Date :

؟ $y''' + 4y' = x \quad , \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad , \quad y''(0) = 1$ ؟

با استفاده از روش ضرایب نامعین ←

$y''' + 4y' = 0 \rightarrow y = e^{rx} \rightarrow r^3 + 4r = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \pm 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \sin 2x \\ y_3 = \cos 2x \end{cases}$

⇐ صورت کلی جواب نامعین → $y_p = (Ax + B)x^s \xrightarrow{s=1} y_p = Ax^2 + Bx$

⇐ تعیین ضرایب ⇐ $4(2Ax + B) = x \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = \frac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow y = y_c + y_p$

$\Rightarrow y = C_1 + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 2x + \frac{1}{8}x^2$

← تعیین C_1 تا C_3 از شرایط اولیه ⇐

$y(0) = 0 \rightarrow C_1 + C_3 = 0$

$y'(0) = 0 \rightarrow 2C_2 = 0$

$y''(0) = 1 \rightarrow -4C_3 + \frac{1}{4} = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{3}{16} \\ C_3 = -\frac{3}{16} \\ C_2 = 0 \end{cases}$

؟ $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 3xe^{4x} + 2\sin 2x$ ؟

→ همگن → $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0 \rightarrow y = e^{rx} \rightarrow r^4 + 8r^2 + 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 2i, 2i \\ r = -2i, -2i \end{cases}$

$\Rightarrow y_1 = \sin 2x \quad , \quad y_2 = \cos 2x \rightarrow y_3 = x\sin 2x \quad , \quad y_4 = x\cos 2x$

→ صورت کلی y_p → $y_p = (Ax + B)e^{4x} x^{s_1} + [(C)\sin 2x + D\cos 2x]x^{s_2}$

$\xrightarrow[s_2 = 2]{s_1 = 0} y_p = (Ax + B)e^{4x} + x^2[C\sin 2x + D\cos 2x]$

$\rightarrow y = y_c + y_p \Rightarrow y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_3 x\sin 2x + C_4 x\cos 2x + y_p$

Arman

? یک زنجیر با طول L بر روی میز صیقلی افقی قرار گرفته است. به طوری که در لحظه ابتدایی طولی به میزان L آویزان است. زنجیر در لحظه $t=0$ از حالت سکون رها می‌شود. اگر y طول قسمت آویزان زنجیر در هر لحظه باشد، با استفاده از قانون دوم نیوتن معادله دیفرانسیل آن به صورت زیر است. زمان مورد نیاز برای اینکه زنجیر میز را ترک کند چقدر است؟

$$\frac{d^2y}{dt^2}-Ky=0 \quad , \quad K=\sqrt{g/L}$$

$$\Rightarrow y''-Ky=0 \xrightarrow{} \text{معادله ضرایب ثابت} \Rightarrow y=e^{rx} \to r^2-K^2=0 \to r=\pm K$$

$$\Rightarrow y_c=C_1e^{Kt}+C_2e^{-Kt} \to \begin{cases} t=0 \to y=l_0 \\ t=0 \to \dfrac{dy}{dt}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_1=\frac{l_0}{2}\ ,\ C_2=\frac{l_0}{2} \Rightarrow y=\frac{l_0}{2}e^{Kt}+\frac{l_0}{2}e^{-Kt}$$

$$\Rightarrow y=l_0\cosh(Kt) \Rightarrow y(T)=L \quad , \quad t=T \text{ در لحظه } \Rightarrow L=l_0\cosh(KT)$$

$$\Rightarrow T=\frac{1}{K}\cosh^{-1}\left(\frac{L}{l_0}\right)$$

? $x^2y''-4xy'+6y=x^4\cos x \quad , \quad x>0 \to$ روش تغییر پارامترها

$$\to \text{همگن} \to \text{اویلر} \Rightarrow y=x^n \to r(r-1)-4r+6=0 \Rightarrow \boxed{r^2-5r+6=0} \xrightarrow{\mathrm{I}} \begin{cases} r=2 \\ r=3 \end{cases} \to \begin{cases} y_1=x^2 \\ y_2=x^3 \end{cases}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dz} \qquad ; \ z=\ln x$$ روش دوم حل معادله همگن ← تغییر متغیر

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dz}\right)=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \frac{d^2y}{dz^2}-5\frac{dy}{dz}+6y=0 \to \boxed{y''-5y'+6y=0}^{\ \mathrm{II}}$$

$$\frac{dA}{dx}=\frac{dA}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

Arman

* معادله I و II شبیه هستند.

$$y'' - \frac{4}{x}y' + 6y = \underbrace{x^2 \sin x}_{g(x)}$$ *

$$\rightarrow W = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = x^4$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = -x^3 \Rightarrow u_1' = \frac{-x^3}{x^4} \times g(x) = -x \sin x \Rightarrow u_1 = x\cos x - \sin x$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = x^2 \Rightarrow u_2' = +\frac{x^2}{x^4} \times g(x) = +\sin x \Rightarrow u_2 = -\cos x$$

$$\Rightarrow y_p = (x\cos x - \sin x)x^2 + (-\cos x)(x^3)$$

$$\Rightarrow y = y_c + y_p \Rightarrow y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + (x\cos x - \sin x)x^2 + (-\cos x)x^3$$

؟ $(3x+2)^2 y'' - (3x+2)y' + y = 3x+1 \rightarrow 3x+2 = t \rightarrow 3dx = dt \rightarrow 9t^2 y'' - 3ty' + y = t-1$

$$\Rightarrow y = t^r \Rightarrow 9r(r-1) - 3r + 1 = 0 \Rightarrow 9r^2 - 12r + 1 = 0 \Rightarrow \dots$$

؟ $y'' + (2x - \frac{1}{x})y' + x^2 y = 0 \quad x > 0$

$$\rightarrow \frac{q' - 2pq}{2q^{3/2}} = \frac{2x + 4x^3 - 2x}{2x^3} = 2 \Rightarrow \dots$$ تبدیل به معادله با ضرایب ثابت می‌شود.

سری

در فصول قبلی تنها معادلات خاصی بررسی شدند مانند ضرایب ثابت ، اویلر و ... . در بسیاری از مسائل مهندسی ممکن است این گونه نباشند . در بسیاری از موارد ممکن است ضرایب چندجمله‌ای باشند مثلاً معادله ژاندر :

$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \rightarrow$ α عدد ثابت

معادله بسل : $x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$ ، v عدد ثابت است .

با اطلاعات کنونی نمی‌توانید معادلات فوق را حل کنید به همین دلیل در این فصل یک معادله کلی را در نظر می‌گیریم .

* فرض کنید P ، Q و R چندجمله‌ای باشند . معادله $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ را در نظر بگیرید . می‌خواهیم جواب این معادله را در نقطه‌ای مانند $x = x_0$ به دست آوریم . اگر $P(x_0) \neq 0$ باشد ، گوییم نقطه $x = x_0$ یک نقطه عادی است در غیر این صورت غیرعادی نامیده می‌شود . در روش سری سعی داریم جواب معادله در اطراف نقطه $x = 0$ را به صورت یک سری $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ در نظر گرفته و با جایگذاری در معادله ضرایب را به دست آوریم . ($y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$)

دقت کنید که همواره با تغییر متغیر $t = x - x_0$ مسئله به نقطه $t = 0$ قابل انتقال است و ما همواره در ابتدا این کار را انجام می‌دهیم .

$y'' + y = 0$ حول نقطه $x = 0$

روش‌های قبلی $\Rightarrow y = e^{rx} \rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = \pm i \Rightarrow y_1 = \sin x \,,\; y_2 = \cos x$

$\Rightarrow y_1 = c_1 \sin x + c_2 \cos x$

روش سری $\Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow y'' = \sum_{n=2}^{\infty} (n)(n-1) a_n x^{n-2}$

Subject :

Year : Month : Date :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$ ← جای‌گذاری در داخل معادله *

■ ۱- توان x سری‌ها را یکی کنید. ■ ۲- اندیس شروع سری را یکسان می‌کنیم.

$$n \to n+2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

۲ سری‌ها n ها را اضافه کرده و از اندیس [illegible] می‌کنیم

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + a_n\right] = 0 \Rightarrow (n+2)(n+1)\, a_{n+2} + a_n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$$ ⇒ رابطه بازگشتی سری

$$\left.\begin{array}{l} n=0 \to a_2 = -\dfrac{a_0}{2} \\ n=2 \to a_4 = -\dfrac{a_2}{4\times 3} = \dfrac{a_0}{4\times 3\times 2} \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m)!}$$

$$\left.\begin{array}{l} n=1 \to a_3 = -\dfrac{a_1}{3\times 2} \\ n=3 \to a_5 = -\dfrac{a_3}{5\times 4} = \dfrac{a_1}{5\times 4\times 3\times 2} \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow a_{2m+1} = \frac{(-1)^m a_1}{(2m+1)!}$$

$\Rightarrow y = \sum a_n x^n =$ (مجموع جملات فرد) + (مجموع جملات زوج)

$$\Rightarrow y = \underbrace{\sum_{m=0} \frac{(-1)^m a_0}{(2m)!} x^{2m}}_{\text{بسط مک‌لورن } \cos x} + \underbrace{\sum_{m=0} \frac{(-1)^m a_1}{(2m+1)!} x^{2m+1}}_{\text{بسط مک‌لورن } \sin x}$$

$$\Rightarrow y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

تمرین استاد ← این خودارها (سری و کلیم) [illegible] ← تا سه‌شنبه