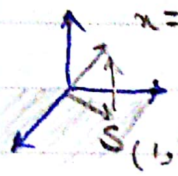
قضیه : در فضای ضرب داخلی V، اگر S زیرفضایی از V باشد؛ هر عضو $x \in V$ را می‌توان بصورت منحصر به فرد به صورت مجموع دو عضو نوشت: که یکی در S است و دیگری در $S^{\perp}$ است.

$$x = s + s^{\perp} \qquad \begin{cases} s \in S \\ s^{\perp} \in S^{\perp} \end{cases}$$

و داریم :

$$\|x\|^2 = \|s\| + \|s^{\perp}\|$$

$V = \mathbb{R}^3$



$$\|x\| = \sqrt{14} \quad , \quad \|s\| = \sqrt{5} \quad , \quad \|s^{\perp}\| = 3$$

$$\Rightarrow 14 = 5 + 9 \ \checkmark$$

اثبات : فرض کنید s به صورت زیر باشد.

$$s = \sum \langle x, e_i \rangle e_i = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \dots + \langle x, e_n \rangle e_n$$

که $\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه متعامد یکه S باشد.

اثبات می‌کنیم عنصر $x - s$ در فضای $S^{\perp}$ است. پس باید اثبات کنیم عنصر $x - s$ به تمام e_i ها عمود است.

s ترکیبی از پایه‌های S است پس $s \in S$

$x - s = x - \langle x, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle x, e_n \rangle e_n$

$\langle x - s, e_1 \rangle = \langle x - \langle x, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle x, e_n \rangle e_n , e_1 \rangle$

$\langle x, e_1 \rangle - \langle x, e_1 \rangle = 0$

پس $x - s$ در فضای $S^\perp$ می‌باشد.

s در S
$s^\perp$ در $S^\perp$

$x = s + s^\perp$

$s = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$

$s^\perp = x - s$

اثبات رابطه و منحصر به فردی آن در کتاب آمده است.

برای مثال بیشتر :

$\{ i, j \}$

$s = \langle x, i \rangle i + \langle x, j \rangle j = \vec{i} + 2\vec{j}$

$s^\perp = x - s = (1,2,3) - (1,2,0) = (0,0,3)$

عنصر s که طبق رابطه‌ی روبه‌رو بدست آمد. $s = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$

نزدیک‌ترین عنصر در زیر فضای S به x است و آن را تصویر x روی S می‌نامیم.

s : تصویر x روی S

می‌دانیم s نزدیکترین عنصر S به x است.

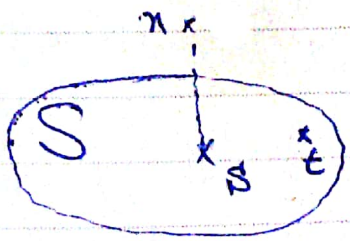
$$s = \langle x, e_1\rangle e_1 + \dots + \langle x, e_n\rangle e_n$$

$\{e_1,\dots,e_n\}$ یکه و متعامد.

اگر $\{e_1,\dots,e_n\}$ فقط متعامد:

$$s = \frac{\langle x,e_1\rangle}{\langle e_1,e_1\rangle} e_1 + \frac{\langle x,e_2\rangle}{\langle e_2,e_2\rangle} e_2 + \dots$$

$$\forall t \in S \Rightarrow \|x-t\| \geq \|x-s\|$$



اثبات:

$$x - t = (x-s) + (s-t)$$

$x-s$: عنصری از $S^\perp$

$s-t$: عنصری از S

پس $x-t$ به صورت مجموع دو عنصر نوشته شده است که یکی در S است و دیگری در $S^\perp$، طبق قضیه:

$$\|x-t\|^2 = \|x-s\|^2 + \|s-t\|^2 \Rightarrow \|x-t\| \geq \|x-s\|$$

مرور:

e_i: متعامد یکه

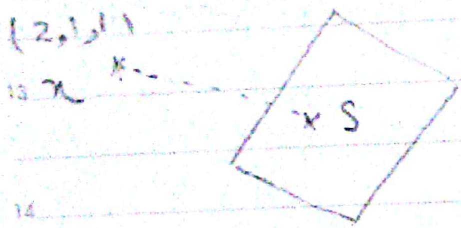
$\hat{S} = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$

e_i: متعامد

برای حل مسائل اول یک شکل شماتیک بکش بعد پایه و یکه را بیابیم.

مثال: تصویر نقطه $(2,1,1)$ را در صفحه $x+y+z=0$ بیابید.

(صورت سوال دیگر: فاصله‌ی نقطه ( ) تا صفحه ( ) را بیابید)



صفحه $x+y+z=0$

$x+y+z=0 \rightarrow x=-y-z$

$(x,y,z)=(-y-z,y,z)=y\underbrace{(-1,1,0)}_{x_1}+z\underbrace{(-1,0,1)}_{x_2}$

$y_1 = x_1 = (-1,1,0)$

$y_2 = x_2 - \dfrac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1$

$\Rightarrow (-1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$

$\Rightarrow \{\underbrace{(-1,1,0)}_{e_1}\ \underbrace{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)}_{e_2}\}$

$$S = \frac{\langle x, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 + \frac{\langle x, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2$$

$$\Rightarrow -\tfrac{1}{2}(-1, 1, 0) + \frac{-1/2}{3/2}\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1\right)$$

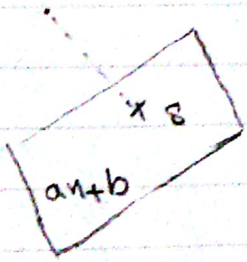
$P_1 = \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{3}\right)$ $\Rightarrow \|P_2 - P_1\| = \sqrt{(P_1 - P_2)\cdot(P_1 - P_2)}$

$P_2 = (2, 1, 1)$

در فضای $C(0,1)$ با ضرب داخلی $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$:

تابع $f(x) = e^x$ را با یک چندجمله‌ای خطی تقریب بزنید.

$f(x) = e^x$



پایه‌ی دلخواه $= \{\underset{x_1}{1}, \underset{x_2}{x}\}$ $\Rightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 = 1 \\ y_2 = x_2 - \dfrac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1 = x - \dfrac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = x - \tfrac{1}{2} \end{cases}$

پایه‌ی متعامد $= \{1, x - \tfrac{1}{2}\}$

$$S = \frac{\langle e^x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 + \frac{\langle e^x, x - \frac{1}{2} \rangle}{\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle} \left(x - \tfrac{1}{2}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 \left(x - \tfrac{1}{2}\right)$$

$\langle e^x, 1 \rangle = \int_0^1 e^x \, dx = e - 1$

$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 dx = 1$

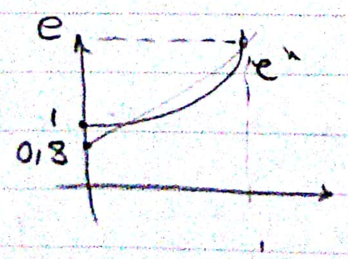
$\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \rangle = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2 \, dx = \frac{1}{3}(x - \frac{1}{2})^3 = \frac{1}{12}$

$\langle e^x, x - \frac{1}{2} \rangle = \int_0^1 (xe^x - \frac{1}{2} e^x) \, dx$

$\Rightarrow xe^x - e^x - \frac{1}{2} e^x = xe^x - \frac{3}{2} e^x \Big|_0^1 = -\frac{e}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3-e}{2}$

$S = e - 1 + \frac{\frac{3-e}{2}}{\frac{1}{12}} (x - \frac{1}{2}) = e - 1 + 6(3-e)(x - \frac{1}{2}) =$

$6(3-e)x + (e - 1 - 9 + 3e) = 6(3-e)x + (4e - 10e)$



Scanned by CamScanner

تبدیل خطی: اگر V و W دو فضای خطی باشند، تبدیل

$T\ V_n \to W_m$، تبدیل خطی است اگر،

$$T(x+y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x) \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

و یا به عبارتی:

$$T(ax+by) = aT(x) + bT(y)$$

تبدیل

هسته (پوچی تبدیل): $N(T)$

عناصری از V که تحت تبدیل T به 0 (صفر) نگاشته می‌شود.

$$N(T) = \{ x \mid x \in V ,\ T(x) = 0 \}$$

برد (مس یا فضای تصویر): $T(V)$

اگر تبدیل T را بر روی همه‌ی عناصر V اعمال کنیم. مجموعه‌ای که حاصل می‌شود. پس را تصویر تبدیل T نامیده می‌شود.

تبدیل پوشا (تبدیل $V \to W$): T پوشاست اگر $\dim(T(V)) = \dim W$

$$\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(V(T))$$

سؤال: برای تبدیلات زیر خطی بودن را بررسی کنید؛ فضای هسته را بیابید.
بعد فضای هسته را بیابید و تصویر را بیابید. فضای تصویر را توصیف کنید. پوشا بودن تبدیل
را بررسی کنید.

$$\begin{cases} T: V_n \to V_n \\ T(x) = x \end{cases}$$

$T(x+y) = T(x) + T(y) \Rightarrow x+y$ ✓

پس خطی است.

$T(\alpha x) = \alpha T(x) \longrightarrow \alpha x$ ✓

فضای هسته: $\{x \mid x \in V,\ T(x) = 0\} \to T(x) = 0 \to \underline{x = 0}$

$\Rightarrow N(T) = \{0\}$ $\quad \dim(N(T)) =$ صفر

فضای تصویر: $T(V) = V_n$ $\quad \dim(T(V)) = n$

$\to \dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(T(V))$

$n = 0 + n$

$$\begin{cases} T: V_n \to W_m \\ T(x) = 0 \end{cases}$$

$T(x+y) = T(x) + T(y) \Rightarrow 0 + 0 = 0$ ✓

$T(\alpha x) = \alpha T(x) \Rightarrow 0 = \alpha 0$ ✓

$N(T) = V_n$ $\qquad \dim(N(T)) = n$

$T(V) = \{0\}$ $\qquad \dim(T(V)) =$ صفر

$\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(T(V))$

$n = n + 0$

$\dim(T(V)) \neq \dim(W)$ $\qquad$ پوشا نیست x

$\rightarrow \begin{cases} T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ T(x+y) = (x,1) \end{cases}$

$T(x+y) = T(x) + T(y)$

$x = (x_1, y_1) \qquad y = (x_2, y_2)$

$\rightarrow T(x_1+x_2, y_1+y_2) = (x_1+x_2, 1)$

$T(x) + T(y) = T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$ $\qquad$ X خطی

$\Rightarrow (x_1, 1) + (x_2, 1) = (x_1+x_2, 2)$

$$\begin{cases} T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) = (y,0,z) \end{cases}$$

$T(x+y) = T(x) + T(y)$

$x = (x_1, y_1, z_1) \qquad y = (x_2, y_2, z_2)$

$\Rightarrow T(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (y_1+y_2, 0, z_1+z_2)$

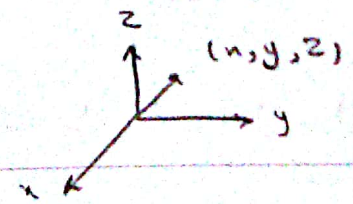
$T(x) + T(y) = T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2)$

$\to (y_1, 0, z_1) + (y_2, 0, z_2) = (y_1+y_2, 0, z_1+z_2)$

$T(\alpha x) = \alpha T(x)$

$T(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) = \alpha T(x_1, y_1, z_1)$

$(\alpha y_1, 0, \alpha z_1) = \alpha (y_1, 0, z_1) \to$ خطی ✓



$N(T)$: $T(x,y,z) = (0,0,0)$

$(y, 0, z) = (0,0,0) \to \underline{y = 0 , z = 0}$

$\to (x,y,z) = (x,0,0) = x(1,0,0) \to \{(1,0,0)\}$, $\dim(N(T)) = 1$

فضای تصویر : $(y,0,z) = (y,0,0) + (0,0,z)$

$y(1,0,0) + z(0,0,1)$

پایه تصویر : $\{(1,0,0), (0,0,1)\}$ صحیح ۲

$\dim(T(V)) = 2$

$\dim(W) = 3 \quad , \dim(T(V)) = 2 \longrightarrow$ پوشانیست

$\dim(V) = \dim(T(V)) + \dim(N(T)) \Rightarrow 3 = 2 + 1$

$\rightarrow \begin{cases} T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ T(x,y,z) = (x,0,2x) \end{cases}$

$T(x,y,z) = (x,0,2x)$

$(x,y,z) = (0,0,0) \longrightarrow x=0$

$(x,y,z) = (0,y,z) = y(0,1,0) + z(0,0,1)$

$\{(0,1,0), (0,0,1)\} \qquad \dim(N(T)) = 2$

$\Rightarrow \dim(V) = \dim(N(T)) + \underbrace{\dim(V(T))}_{1}$

$3 = 2 + 1$

فضای تصویر : $(x, 0, 2x) = x(1, 0, 2)$

8 $T(V)$ پایه‌ای برای : $\{(1, 0, 2)\}$

9 پایان!

10 $\begin{cases} T: P_n \quad n \leqslant 2 \longrightarrow P_m \quad m \leqslant 1 \\ T(ax^2 + bx + c) = (a - c)x \end{cases}$

11

12 هسته : $T(ax^2 + bx + c) = 0$

13 $(a - c)x = 0 \rightarrow \boxed{a = c}$

14 $\rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + a$

15 $= a(x^2 + 1) + bx \longrightarrow \{x^2 + 1, x\}$

16 $\dim(N(T)) = 2$

17 $\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(V(T))$

18 $3 = 2 + 1$

فضای تصویر : $T(ax^2 + bx + c) = (a - c)x \rightarrow \{x\}$

$\dim(T(V)) = 1$

$\dim(P_m \quad m \leqslant 1) = 2 \qquad \dim(V(T)) = 1$

پایان!

$$\rightarrow \begin{cases} T: P_n \;\; n \leq 2 \longrightarrow P_m \;\; m \leq 3 \\ T(ax^2 + bx + c) = (a+b)x^3 + cx + c \end{cases}$$

هسته : $T(ax^2+bx+c) = 0 \longrightarrow (a+b)x^3 + cx + c = 0$

$\rightarrow \underline{a = -b}, \; \underline{c = 0}$

$ax^2 + bx + c = -bx^2 + bx + 0 \rightarrow b(x - x^2)$

پایه : $\{x - x^2\}$ $\quad \dim(N(T)) = 1$

$\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(R(T)) \Rightarrow 3 = 1 + 2$

$(a+b)x^3 + cx + c$

$(a+b)x^3 + c(x+1) \longrightarrow$ پایه : $\{x^3, x+1\}$ $\quad \underline{\dim(T(V)) = 2}$

$$\rightarrow \begin{cases} T: V_n \rightarrow \mathbb{R} \\ T(x) = \langle x, \lambda \rangle \end{cases}$$

λ : عنصر ثابت غیر صفر.

نگاشت خطی ها ضرب داخلی ← خطی است.

فضای هسته : x هایی که $\langle x, \lambda \rangle = 0$ یعنی عناصر عمود بر λ

TUESDAY

سه شنبه

۲۸ شعبان ۱۴۳۹

$\dim(T(V)) = 1$

$\longrightarrow \dim V = \dim(N) + \dim(T) \rightarrow n = \bigcirc + 1$

$\hookrightarrow \dim(N) = n - 1$