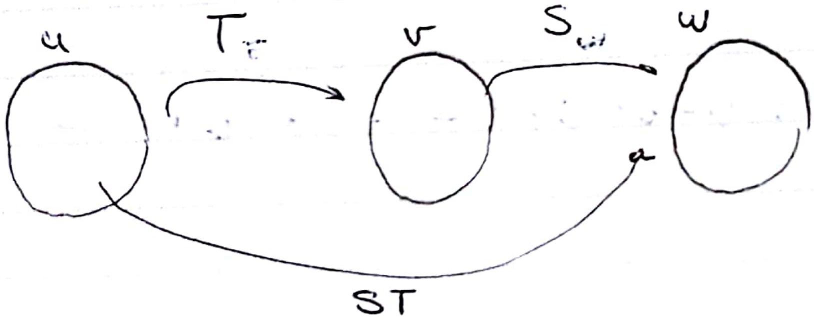
ترکیب تبدیلات خطی :

هرگاه $T: V \to V$ و $S: V \to W$ دو تبدیل خطی باشد، تبدیل $ST: V \to W$ به صورت زیر تعریف می‌شود : $ST(x) = S(T(x))$



$ST(x) = S(T(x))$

مثال : $ST, TS = ?$

$T(x, y, z) = (x+y, y, z)$

$S(x, y, z) = (y, x, z)$

$TS(x, y, z) = T(S(x, y, z)) = T(y, x, z) = (y+x, x, z)$

$ST(x, y, z) = S(T(x, y, z)) = S(x+y, y, z) = (y, y+x, z)$

$\Longrightarrow TS \neq ST$

تبدیل یک به یک: تبدیل T یک به یک است اگر و تنها اگر دو عضد متمایز را به دو عضد متمایز می نگارد.

$x \neq y \Rightarrow T(x) \neq T(y)$

یا

$T(x) = T(y) \longrightarrow x = y$

تعریف: اگر تبدیل T یک به یک باشد، معکوس آن که با T^{-1} نشان داده می شود. به صورت زیر تعریف می شود.

$T^{-1}(T(x)) = x$

مثال: یک به یکی تبدیلات خطی زیرا بررسی کرده و معکوس آن را پیدا کنید.

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$T(x, y, z) = (x - y + z, 2x + y - z)$

$T(x_1, y_1, z_1) = T(x_2, y_2, z_2)$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x_1 - y_1 + z_1 = x_2 - y_2 + z_2 \\ 2x_1 + y_1 - z_1 = 2x_2 + y_2 - z_2 \end{cases} \oplus \longrightarrow \underline{x_1 = x_2} \Rightarrow \underline{y_1 - z_1 = y_2 - z_2}$$

نمی توان نتیجه گرفت که $y_1 = y_2$ و $z_1 = z_2$ مثل

$(1, 5, 3)$ $\quad$ $(1, 6, 4)$

$T \downarrow$ $\quad$ $T \downarrow$

$(-1, 4)$ $\quad$ $(-1, 4)$

پس تبدیل T یک به یک نیست و معکوس ندارد.

$\rightarrow T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$T(x,y) = (x-y, x+y)$

$T(x_1,y_1,z_1) = T(x_2,y_2,z_2)$

$\begin{cases} x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \\ x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{array}$

تبدیل خطی است.

ادامه مثال بالا

$\rightarrow T^{-1}(T(x,y)) = (x,y) \rightarrow T^{-1}(\underbrace{x-y}_{a}, \underbrace{x+y}_{b}) = (x,y)$

$\begin{cases} x-y = a \\ x+y = b \end{cases} \rightarrow x = \dfrac{a+b}{2} \qquad y = \dfrac{b-a}{2}$

$\rightarrow T^{-1}(a,b) = \left(\dfrac{a-b}{2}, \dfrac{b-a}{2}\right)$

$\hookrightarrow T^{-1}(x,y) = \left(\dfrac{x-y}{2}, \dfrac{y-x}{2}\right)$

روش دوم بررسی یک به یک:

فرض کنید تبدیل T یک به یک نباشد. پس x,y موجودند که $x \neq y$ ولی $T(x)=T(y)$

$T(x) = T(y) \rightarrow T(x) - T(y) = 0 \rightarrow T(x-y) = 0$

پس $x-y \neq 0$ در فضای هسته است پس هسته بعد دارد.

$\dim(N(T)) \neq 0$

if: اگر تبدیل یک به یک باشد: $\dim(N(T)) = 0$

if: اگر تبدیل یک به یک نباشد: $\dim(N(T)) \neq 0$

به عنوان مثال برای دو مثال قبل:

- $T(x,y,z) = (x-y+z,\ 2x+y-z)$

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right\} \rightarrow x=0 \quad y=z$$

$$\Rightarrow (x,y,z)=(0,y,y) \rightarrow y(0,1,1)$$

پایه هسته: $\{(0,1,1)\}$ $\quad \dim(N(T))=1 \longrightarrow$ خطی نیست!

- $T(x,y) = (x+y,\ x-y)$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right\} \rightarrow x=y=0$$

هسته: $\{(0,0)\}$

$\dim(N(T)) = 0 \longrightarrow$ خطی هست

نمایش ماتریسی تبدیلات خطی :

فرض کنید $T: u_n \to w_m$ یک تبدیل خطی باشد، $\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه‌ای برای u
و $\{w_1, \dots, w_m\}$ پایه‌ای برای w باشد. آنگاه هر عنصر $T(e_i)$ را می‌توان
بصورت ترکیب خطی از w_i ها نوشت.

$$T(e_1) = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots \; a_{m1} w_m$$

$$T(e_2) = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots \; a_{m2} w_m$$

$$T(e_3) = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots \; a_{mn} w_m$$

ماتریسی که درایه‌های آن a_{ij} ها باشد. ماتریس تبدیل T در این پایه‌ها می‌باشد.

$$\underset{n \to m}{[T]} = \begin{array}{c|c} & T(e_1) \;\cdots\; T(e_n) \\ \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & \end{pmatrix}_{m \times n} \end{array}$$

برای پیدا کردن تبدیل یک عنصر دلخواه $u = c_1 e_1 + \dots c_n e_n$
کافی است ماتریس T را در بردار مولفه‌های u در پایه‌ی $\{e_i\}$ ضرب کنیم.
جواب برداری است که مولفه‌های $T(u)$ در پایه‌ی $\{w_i\}$ می‌باشد.

$$[T]_{m \times n} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix} = d_1 w_1 + d_2 w_2 + \dots d_m w_m$$

مثال: تبدیل $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y,z) = (x-y, 2y-2z)$

① ماتریس این تبدیل در پایه های استاندارد $\{i, j, k\}$ بنویسید.

② $T(2i+j-k)$ را با ضابطه و ماتریس به دست آورید.

③ اگر برای $\mathbb{R}^3$ از پایه $\{i, j, -k\}$ و برای $\mathbb{R}^2$ از پایه های $\{j-i, i+j\}$ استفاده کنیم. ماتریس T را به دست آورید.

④ با استفاده از ماتریس به دست آمده $T(2i+j-k)$ را مجدداً حساب کنید.

$T(i) \quad T(j) \quad T(k) \longrightarrow$ بردا

① $T = \begin{array}{c} i \\ j \end{array}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 3}$

نقطه

$T(i) = T(1,0,0) = 1$

$T(j) = T(0,1,0) = (-1,2)$

$T(z) = T(0,0,z) = (0,2)$

② $T(2i+j-k) = T(2,1,-1) = (1,4)$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\vec{i} + 4\vec{j}$

(3)

$$T = \begin{array}{c} i+j \\ i-j \end{array} \begin{pmatrix} \alpha & & \\ \beta & & \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

$$T(i) = T(1,0,0) = (1,0) = i$$

$$i = \alpha(i+j) + \beta(i-j) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha - \beta = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\alpha = \beta = 1/2}$$

$$T(j) = (-1,2) = -i + 2j = \alpha(i+j) + \beta(i-j)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ \alpha - \beta = 2 \end{cases} \rightarrow \boxed{\alpha = 1/2} \quad \boxed{\beta = -3/2}$$

$$T(-k) = (0,2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -3/2 & -1 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -3/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ -3/2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} i+j \\ i-j \end{array}$$

$$T(2i + j - k) = 5/2(i+j) - 3/2(i-j) = 1\vec{i} + 4\vec{j}$$

مثال: تبدیل $T: P_n \to P_n$ $(n=1)$ به صورت

$T(f) = xf' - 2f$ تعریف شده است.

① ماتریس این تبدیل در پایه‌ی دلخواه

② $T(5-2x)$ با ماتریس و ضابطه

③ بررسی یک به یکی

④ اگر از $\{1+x, 2x\}$ به عنوان پایه‌ی مبدا و $\{x-1, 1\}$ به عنوان پایه‌ی مقصد استفاده کنیم. ماتریس T را بنویسید.

⑤ با استفاده از ماتریس قسمت ۴ قسمت 2 را تکرار کنید.

$\{1, x\}$

①
$$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ x \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T(1) & T(x) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$T(1) = x(0) - 2(1) = -2$$

$$T(x) = x - 2(x) = -x$$

② $T(5-2x) = x(-2) - 2(5-2x) = \underline{2x-10}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(3) $T(ax+b)=0$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{a=b=0}$$

$\dim(N(T))=0 \rightarrow$ ✓ یک‌به‌یک

روش دوم: $T(f) = xf' - 2f = 0 \rightarrow xf' = 2f \rightarrow \frac{f'}{f} = \frac{2}{x}$

$\rightarrow \ln f = \ln x^2 + C \rightarrow \underline{f = Cx^2}$

چون فضای ما، فضای چند جمله‌ای‌های مرتبه ۱ است، پس $f(x)$ فقط به ازای $c=0$ قابل قبول است.

(4) $$T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 1-x \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T(1+x) & T(2x) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$T(1+x) = -x-2$

$T(2x) = -2x$

(5) $5-2x = \alpha(1+x) + \beta(2x) \rightarrow \alpha = 5 \;,\; \beta = -7/2$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 1 \\ \rightarrow 1-x \end{array}$$

جواب $= -8(1) - 2(1-x)$

مقادیر و بردارها ی ویژه :

اگر $T: u_n \to u_n$ یک تبدیل خطی باشد ؛ داسکالر λ و عنصر x (عدد)

وجود داشته باشد . به طوری‌که $T(x) = \lambda x$ (تبدیل x مضربی از خود آن شود)

λ را مقادیر ویژه و x را بردار ویژه (عنصر ویژه) می‌نامیم عنصر x باید

مخالف ۰ باشد . $(x \neq 0)$ / λ می‌تواند باشد . $T(0) = 0$

هر بردار ویژه فقط یک مقدار می‌تواند باشد .

$$\left.\begin{array}{l} T(x) = \lambda_1 x \\ T(x) = \lambda_2 x \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = (\lambda_1 - \lambda_2) x$$

$$x \neq 0 \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

اگر x بردار ویژه λ باشد . هر چند پس از آن نیز بردار ویژه مربوط به λ است .

$T(x) = \lambda x$

$T(kx) = kT(x) = \lambda(kx)$

$kx = \alpha \longrightarrow T(\alpha) = \lambda \alpha$

- فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد . در این صورت به $\lambda \in \mathbb{R}$ و

$x \neq 0$ در $\mathbb{R}^n$ به ترتیب مقادیر ویژه و بردار ویژه ماتریس A گوییم . هرگاه $Ax = \lambda x$

مثال: تبدیل T هر نقطه‌ی (x,y,z) را نسبت به صفحه‌ی xy قرینه می‌کند.

$$T(x,y,z) = (x,\ y,\ -z)$$

- تمام بردار های موجود در صفحه‌ی xy بردار ویژه اند. $\lambda = 1$

← چون تمام جواب یک ضریبی از خود x می‌شود با $\lambda = 1$

- بردار موازی محورها: $(0,0,z)$: جواب ← $(0,0,-z)$ ← $\lambda = -1$

مثال: تبدیل T دوران 90° حول مبدأ مختصات: T مقدار ویژه ندارد

T^2 تمام نقاط (جز مبدأ) بردار ویژه اند. $\underline{\lambda = -1}$

$$T^2(x) = T(T(x))$$

مثال:

$$\begin{cases} T: C(-\infty,+\infty) \to C(-\infty,+\infty) \\ T(f) = f' \end{cases}$$

$$\lambda f = f' \Rightarrow \frac{df}{dt} = \lambda f \to \frac{df}{f} = \lambda\, dt$$

$$\ln f = \lambda t + c \to \underline{f = ce^{\lambda t}},\quad c \neq 0$$

λ: هر عدد حقیقی

$$-\begin{cases} T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ T(x,y) = (2x+y,\ x+2y) \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T(i) & T(j) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$T(i) = T(1,0) = (2,1) \quad , \quad T(j) = T(0,1) = (1,2)$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2-\lambda = 1 \to \lambda = 1 \\ 2-\lambda = -1 \to \lambda = 3 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x+y=0 \to x=-y \to (x,y) = y(-1,1) \\ -x+y=0 \to x=y \to (x,y) = y(1,1) \end{cases}$$

- T دوران 90° حل مسئله :

$$\begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} T(i) & T(j) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ +1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \longrightarrow \lambda = \pm i \to$$ جواب حقیقی ندارد.

$$\begin{cases} T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ T(x,y,z) = (2x - y + z,\ 3y - z,\ 2x + y + 3z) \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T(i) & T(j) & T(k) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)\left[(3-\lambda)^2 + 1\right] + 1[2] + 1\left[-2(3-\lambda)\right] = 0$$

$$\lambda - 2$$

$$(2-\lambda)(3-\lambda)^2 + (2-\lambda) + 2 + (-6 + 2\lambda) = 0$$

$$(2-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 1\right) = 0 \qquad \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = 4 \end{cases}$$

ولادت حضرت امام حسن مجتبی علیه‌السلام (۳ هـ ق) و روز اکرام

$$\hookrightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \to x = z, \quad y = -z$$

$$(x,y,z) = (z,-z,z) = z(1,-1,1)$$

$$\Rightarrow \lambda = 2: \begin{cases} -y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad y = z, \quad \to x = -z$$

$$(x,y,z) = (-z,z,z) = z(-1,1,1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|A - I\lambda| = 0 \longrightarrow \lambda = \underbrace{1, 1}_{\text{تکراری}}, 7$$

$$\underline{\lambda = 7} \rightarrow \begin{cases} -5x + y + z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x \\ z = 3x \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (x, 2x, 3x) = x(1, 2, 3)$$

$$\lambda = 1 \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases} \longrightarrow (x+y, z) = 0$$

کل بردارهای موجود در این صفحه

13 SUNDAY

یک‌شنبه

۱۸ رمضان ۱۴۳۹

تبدیل T ، دوران 90° هر نقطه (x,y) حول مبدأ . مقادیر ویژه و بردار ویژه T و $T^2 = ?$ T مقدار ویژه و بردار ویژه ندارد (چون دوران $(0,0)$ هسته قبلا گفتیم $x \neq 0$) . T^2 یعنی $T(T(x))$ ← 180° دوران میکند یعنی قرینه هر بردار x ، T^3