نامساوی کوشی - شوارتز :

$$\langle x,y\rangle^2 \le \langle x,x\rangle \langle y,y\rangle$$

نرم یک عنصر : نرم عنصر $x$ با $\|x\|$ نشان داده می‌شود و بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2} = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

تعریف : در فضای خطی $V$، زاویه $\theta$، $0 \le \theta \le \pi$ بین دو عنصر به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$$

مثال : در فضای خطی $C[-1,1]$ اندازه‌ی تابع $f(x)=x$ و زاویه‌ی آن را با $g(x)=x+1$ پیدا کنید.

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx$$

حل : $\|f(x)\| \Rightarrow \langle f(x), f(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$

$$\|f(x)\| = \sqrt{2/3}$$

$$\|g(x)\| \Rightarrow \langle g(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} g^2(x)\,dx = 8/3 \rightarrow \|g(x)\| = \sqrt{8/3}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle x, x+1\rangle}{\|f(x)\|\,\|g(x)\|} = \frac{2/3}{\sqrt{\frac{8}{3}} \times \sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \pi/3$$

تعریف: دو عضو متعامدند اگر $\langle x,y\rangle=0$

تعریف: مجموعه $\{x_1,\dots,x_n\}$ متعامد هستند اگر $\langle x_i,x_j\rangle=0 : i\neq j$

تعریف: مجموعه $S$ یکه است اگر نرم تمام عناصر آن ۱ باشد. $\langle x_i,x_i\rangle=1$

تعریف: مجموعه $S=\{x_1,\dots,x_n\}$ متعامد یکه است:

$$\langle x_i,x_j\rangle=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

مثال: در فضای $C(1,e)$ با ضرب داخلی $\langle f,g\rangle=\int_1^e \ln x\, f(x)g(x)\,dx$

چند جمله‌ای $f(x)=ax+b$ را طوری بیابید که بر $g(x)=1$ عمود باشد.

$$\langle ax+b,1\rangle=\int_1^e (ax+b)(1)\ln x\,dx=0$$

$$\Rightarrow a\int_1^e x\ln x\,dx+b\int_1^e \ln x\,dx=0$$

$$\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{4}$$



$$\Rightarrow a\left(\frac{e^2+1}{4}\right)+b=0\rightarrow b=-a\left(\frac{e^2+1}{4}\right)$$



$$\Rightarrow f(x)=ax-a\left(\frac{e^2+1}{4}\right)=a\left(x-\frac{e^2+1}{4}\right)$$

قضیه: در فضای ضرب داخلی V، اگر S مجموعه‌ای از عناصر متعامد و ناصفر باشد، S حتما مستقل است.

اثبات: if: ترکیب خطی عناصر S صفر شود. $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0$$

باید اثبات کنیم $c_1 = \dots = c_n = 0$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0$$

در طرفین $x_1$ را ضرب داخلی می‌کنیم.

$$c_1\langle x_1, x_1\rangle + c_2\langle x_1, x_2\rangle + \dots + c_n\langle x_1, x_n\rangle = 0$$

$\to c_1\langle x_1, x_1\rangle = 0 \to$ طبق شرط ۴: $\langle x_1, x_1\rangle \neq 0 \to c_1 = 0$

به همین ترتیب $x_2, x_3, \dots, x_n$ را ضرب می‌کنیم. $\Leftarrow c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$

پس S مستقل است.

نتیجه: فرض کنید $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ یک پایه‌ی متعامد برای فضای ضرب داخلی $V_n$ باشد.

اگر هر $x \in V$ را بصورت ترکیب خطی از عناصر S بنویسیم.

$$x = c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_ne_n.$$

مولفه‌ها x ($c_i$ ها) در پایه‌ی S بصورت زیر می‌باشد.

$$c_i = \frac{\langle x, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle}$$

$x = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$

ضریب $\vec{i}$ $= c_i = \frac{\langle x , i \rangle}{\langle i , i \rangle} = \frac{(2,3,5)\cdot(1,0,0)}{(1,0,0)(1,0,0)} = 2$

برای اثبات طرفین را در $e_1$ ضرب داخلی می‌کنیم.

$\langle x_1 , e_1 \rangle = c_1 \langle e_1 , e_1 \rangle + 0 + 0 + \dots + 0$

$c_1 = \frac{\langle x_1 , e_1 \rangle}{\langle e_1 , e_1 \rangle} \quad , \quad c_i = \frac{\langle x_i , e_i \rangle}{\langle e_i , e_i \rangle}$

مثال: بردار $x = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ را در دستگاه مختصات $\{i+j , i-j , k\}$ بیان کنید.

$x = c_1 (i+j) + c_2 (i-j) + c_3 (k) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$

$c_1 = 5/2 \quad c_2 = -1/2 \quad c_3 = 5$

$(i , j , k) \to (2, 3, 5)$

$(i+j , i-j , k) \to (5/2 , -1/2 , 5)$

روش دوم: مجموعه $\{i+j , i-j , k\}$ متعامد است.

$c_1 = \frac{\langle x , e_1 \rangle}{\langle e_1 , e_1 \rangle} = \frac{\langle (2,3,5)\cdot(1,1,0) \rangle}{\langle (1,1,0)\cdot(1,1,0) \rangle} = 5/2$

$$C_2 = \frac{\langle (2,3,5),(1,-1,0)\rangle}{\langle (1,-1,0),(1,-1,0)\rangle} = -\frac{1}{2} \quad , C_3 = 5$$

عنصر $x$ در پایه متعامد $\{e_1, \dots, e_n\}$ بیان می‌شود به صورت زیر:

$$x = \frac{\langle x, e_1\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle} e_1 + \frac{\langle x, e_2\rangle}{\langle e_2, e_2\rangle} e_2 + \dots + \frac{\langle x, e_n\rangle}{\langle e_n, e_n\rangle} e_n$$

اگر پایه‌ای متعامد یکه باشد:

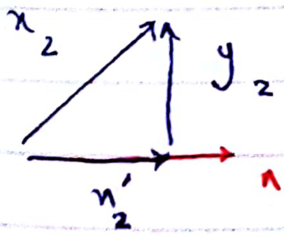
$$C_i = \frac{\langle x, e_i\rangle}{\langle e_i, e_i\rangle} = \langle x, e_i\rangle$$

$$x = \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2 + \dots + \langle x, e_n\rangle e_n$$

علاقه‌مندیم پایه‌ای که برای $V$ استفاده می‌کنیم متعامد یکه باشد.

فرض کنید: $\{x_1, \dots, x_n\}$ یک پایه‌ی دلخواه برای فضای خطی $V$ باشد، می‌خواهیم با استفاده از این پایه، پایه‌ی متعامد $\{y_1, \dots, y_n\}$ را برای $V$ پیدا کنیم.

(برای شروع کار $y_1$ را همان $x_1$ در نظر می‌گیریم.)




$\vec{x}_1 = \vec{y}_1$

(تصویر $x_2$ در $x_1$)

$$y_2 = x_2 - x_2'$$

$\|x_2'\| = \|x_2\| \cos\theta$

$$\cos\theta = \frac{\langle x_2 , y_1 \rangle}{\|x_2\| \|y_1\|} \Rightarrow \|x_2'\| = \cancel{\|x_2\|} \frac{\langle x_2 , y_1 \rangle}{\cancel{\|x_2\|} \|y_1\|}$$

$$\Rightarrow x_2' = \|x_2'\| e_{x_2'} = \|x_2'\| \frac{y_1}{\|y_1\|} \to \vec{x}_2' = \frac{\langle x_2 , y_1 \rangle}{\langle y_1 , y_1 \rangle} \vec{y}_1$$

$$y_1 = x_1 \to y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2 , y_1 \rangle}{\langle y_1 , y_1 \rangle} y_1$$

$$y_3 = x_3 - \frac{\langle x_3 , y_1 \rangle}{\langle y_1 , y_1 \rangle} y_1 - \frac{\langle x_3 , y_2 \rangle}{\langle y_2 , y_2 \rangle} y_2$$

با استفاده از روش گرم - اشمیت و ۳ بردار داده شده، ۳ بردار یکه متعامد به دست می‌آید.

$x_1 = (1,1,0) \quad x_2 = (0,1,1) \quad x_3 = (1,1,1)$

$y_1 = (1,1,0) \quad y_2 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) = (-1/2, 1/2, 1)$

$y_3 = (1,1,1) - \frac{2}{2}(1,1,0) - \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) = (1/3, -1/3, 1/3)$

پایه های متعامد:

$y_1 = (1,1,0) \quad y_2 = (-1/2, 1/2, 1)$

$y_3 = (1/3, -1/3, 1/3)$

رادارهای یکه:

$$y_1 = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$$

$$y_2 = \frac{(-1/2, 1/2, 1)}{\sqrt{3/2}} \quad , \quad y_3 = \frac{(+1/3, -1/3, 1/3)}{\sqrt{1/3}}$$

مثال: برای فضای $P_n$ $n \geq 2$ با ضرب داخلی $\langle f,g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ یک

پایه‌ای متعامد یکه بیابید.

$$\{1, x, x^2\}$$
$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$$y_1 = x_1 = 1$$

$$y_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, y_1 \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle} y_1$$

$$y_2 = x - \frac{\langle x,1 \rangle}{\langle 1,1 \rangle} \rightarrow \langle x,1 \rangle = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

$x_2$ روی $x_1$ از قبل متعامد بود.

if در سوالی مثلاً: در فضای $\mathbb{R}^3$، 3 بردار پایه متعامد یکه می‌خواست می‌توانیم

از k در آن استفاده کنیم.

تعریف: در فضای حقیقی V، عنصر $x \in V$ به زیرفضای S عمود است. هرگاه به همه عناصر S عمود باشد. می‌توان نشان داد اگر x به پایه S عمود باشد، به همه عناصر آن عمود خواهد بود.

مجموعه‌ی همه عناصری که بر S عمودند را مکمل متعامد S می‌نامند و با $S^{\perp}$ نشان می‌دهند.

می‌توان به راحتی اثبات کرد، $S^{\perp}$ خود زیرفضاست.

$$\dim(V) = \dim(S) = \dim(S^{\perp})$$

$V = \mathbb{R}^3 \qquad S = \mathbb{R}^2 \rightarrow S^{\perp} =$ محور z ها

مثال: در فضای $S = \mathbb{R}^3$ به صورت زیر تعریف شده است.

$$S = \{(x,y,z) \mid (x,y,z) = \alpha(1,-2,1),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$S^{\perp}$ و یک پایه برای آن بدست آورید.

$(x,y,z) \cdot \alpha(+1,-2,1) = 0$

برای رسم بردار عمود بر یک صفحه باید یک بردار نرمال و یک نقطه داشته باشیم. $(0,0,0)$

$x - 2y + z = 0$



$(x,y,z) = (2y-z, y, z)$

$(2y, y, 0) + (-z, 0, z) \Rightarrow$

$y(2,1,0) + z(-1,0,1) = \{(2,1,0), (-1,0,1)\}$

درس دهم : دو بردار دیگه از صفحه پیدا کنید

$x - 2y + z = 0$

$x = 2 \quad y = 1 \quad z = 0 \quad (2, 1, 0)$

$x = 1 \quad y = 0 \quad z = -1 \quad (1, 0, -1)$

مثال : در فضای $C[-1,1]$ ، فضای خطی $V$ را به صورت $\{ f(t) \mid f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \}$ تعریف شده باشد. اگر $S$ زیرفضای $V$ باشد که $f(0) = f(1)$ با ضرب داخلی $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(u) g(u)\, du$ ، $S^{\perp}$ و بعد آن را پیدا کنید.

$a_0 = a_0 + a_1 + a_2$

$a_1 + a_2 = 0$ پایه $S \Rightarrow \{1, t^2 - t\}$

$f(t) = a_0 + a_1 t - a_1 t = a_0 + a_1 (t - t^2)$ بعد ۲ است

$\dim(S^{\perp}) = 1$

$$\int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 (t - t^2)) \underbrace{(a_0 + a_1 (x - x^2))}_{g(t)} dt = 0$$

$$\rightarrow \int_{-1}^{1} a_0 \, g(t)\, dt + \int_{-1}^{1} a_1 g(t) (t - t^2)\, dt = 0$$

$$\int (a_0 + a_1(t - t^2))(1 + t + t^2)$$

$$\Rightarrow \int (a_0 + a_1(t - t^2))(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)\,dt = 0$$

$$\begin{cases} \langle b_0 t + b_1 t + b_2 t^2, 1 \rangle = 0 \\ \langle b_0 + b_1 t + b_2 t^2, t^2 - t^2 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$ل \begin{cases} b_0 + \frac{b_2}{3} = 0 \rightarrow b_2 = -3b_0 \\ \frac{b_0}{3} - \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{5} = 0 \rightarrow b_1 = 3\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right) b_0 \end{cases}$$

$$P(t) = \left(1 - \frac{4}{5}t - 3t^2\right) b_0 + S^{\perp}$$

یعنی $S^{\perp} = \left\{ \left(1 - \frac{4}{5}t - 3t^2\right) \right\}$