مجموعه های وابسته و مستقل :

مجموعه S متشکل از k عنصر $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ را وابسته می‌گویند هرگاه بتوان

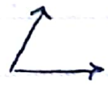
ترکیب خطی از عناصر آن را صفر کرد. به عبارتی : $c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_kx_k=0$

به طوری که همه c ها باهم صفر نباشند.

(if : همه صفر باشند ⇐ بدیهی است آن وقت)

مجموعه S را مستقل گوییم اگر وابسته نباشد.

مثال : مستقل R^2 $\rightarrow S=\{i, j\}$



دو بردار عمود برهم هستند (زاویه دارند)

راستای متفاوت دارند.

$c_1 i + c_2 j = 0$

$\hookrightarrow c_1(1,0)+c_2(0,1)=(0,0) \rightarrow (c_1,c_2)=(0,0) \rightarrow c_1=c_2=0$ مستقل

تنها راه وابسته بودن ← برای وابسته بودن باید غیر صفر جواب باشد.

$\rightarrow \{i, j, 2i-3j\}$ وابسته

$-2(i)+3(j)+1(2i-3j)=(0,0)=0$

$c_1(1,0)+c_2(0,1)+c_3(2,-3)=(0,0)$

$(c_1+2c_3,\ c_2-3c_3)=(0,0)$

$$\begin{cases} c_1+2c_3=0 \rightarrow c_1=-2c_3 \\ c_2-3c_3=0 \rightarrow c_2=3c_3 \end{cases}$$

اینها فقط یکسری از جوابها هستند ← $c_3=1$, $c_2=3$, $c_1=-2$

Note

$\rightarrow \{1, x\}$ در فضای : $\{P_n \quad n \leq 1\}$ مستقل

$$c_1(1) + c_2(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

← x باید به ازای تمامی اعداد بررسی شود.

$\rightarrow \{1 + x, 2 + 2x\}$ در فضای : $\{P_n \quad n \leq 1\}$ وابسته

$\rightarrow \{1 - x^2, 7 + 2x^2, 1\}$ در فضای $\{P_n \quad n \leq 2\}$ وابسته

$$c_1(1 - x^2) + c_2(7 + 2x^2) + c_3(1) = 0$$

$$c_1 + 7c_2 + c_3 + (2c_2 - c_1)x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 + 7c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_2 - c_1 = 0 \rightarrow c_1 = 2c_2 \end{cases} \quad c_3 = -9c_2$$

$c_1 = 2$ و $c_2 = 1$ ، $c_3 = -9$ ، اینها فقط یک جواب از بی‌نهایت جوابها هستند.

$\rightarrow \{1, 1 + x, 1 - x + x^2\}$ مستقل

$$c_1 + c_2(1 + x) + c_3(1 - x + x^2) = 0$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + (c_2 - c_3)x + c_3 x^2 = 0 \quad \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \rightarrow c_1 = 0 \\ c_2 - c_3 = 0 \rightarrow c_2 = c_3 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \{\sin^2 x, 7 - \cos 2x, 1\}$ وابسته

$$\{\sin^2 x, 7 - (1 - 2\sin^2 x), 1\} \rightarrow c_1 \sin^2 x + c_2(6 + 2\sin^2 x) + c_3 = 0$$

$$\underbrace{(6c_2 + c_3)}_{0} + \underbrace{(c_1 + 2c_2)}_{0}\sin^2 x = 0 \rightarrow \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ 6c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = -2c_2 \\ c_3 = -6c_2 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$\rightarrow \{\sin x, \cos x, 1\}$ ‌ ‌ ‌ مستقل

$c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 (1) = 0$

$\rightarrow \{\sin x, \cos x\}$ ‌ ‌ ‌ مستقل

$c_1 \sin x + c_2 \cos x = 0 \rightarrow \tan x = -\frac{c_2}{c_1}$

پس فقط به ازای x خاص این رابطه برقرار میشود

$\rightarrow \{\sin^2 x, 2\cos^2 x + 1, -1\}$ ‌ ‌ ‌ وابسته

$\rightarrow \{\sin^2 x, 2\cos^2 x + 1\}$ ‌ ‌ ‌ مستقل

$\rightarrow \{0, x, x^2\}$ ‌ ‌ ‌ وابسته

if : هر مجموعه‌ای که شامل عنصر صفر باشد ← وابسته است.

if : در مجموعه‌ای دو عنصر ضریب دیگری باشند ← وابسته است.

مثال :

if : $S \subset T$ باشد.

اگر S وابسته باشد ؛ T وابسته است. ✗

اگر T وابسته باشد ؛ S وابسته است. ✓

Note

نکته: اگر $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ مجموعه‌ای مستقل در فضای خطی V باشد و $L(S)$ زیر فضای پدید آمده توسط آن باشد. هر مجموعه $k+1$ عضوی در $L(S)$ وابسته است.

$S = \{i, j\}$ $L(S)$ تمام ترکیبات خطی عناصر: $\mathbb{R}^2$

در نتیجه: هر مجموعه ۳ عضوی از $\mathbb{R}^2$ وابسته است.

مثال:

$\to \{1, x\}$

$L(S)$: تمام چندجمله‌ای ها حداکثر درجه ۱

$\{1-2x, \frac{5}{2}+4x, x-1\} \longrightarrow$ طبق نکته وابسته است.

$\to \{i, j, k\}$

$L(S) = \mathbb{R}^3$

If مجموعه‌ای ۴ عضوی از بردارها انتخاب کنیم حتما وابسته است.

پایه: فضای خطی V را در نظر بگیرید گوییم مجموعه S پایه V است هرگاه مستقل بوده و V را بپیماید (یعنی بتوان با ترکیب خطی عناصر S به هر عضو دلخواه V دست یافت) $(S \subset V)$

تعداد اعضای S را بعد V نامیده و با $\dim(V)$ نشان می‌دهند.

- فضای $\mathbb{R}^2$ پایه: $\{i, j\}$

- $\{i+j, i-j\}$

می‌خواهیم با ترکیب خطی $i+j$ و $i-j$ به عنصر دلخواه (x, y) برسیم.

$c_1(i+j) + c_2(i+j) = (x, y) \to c_1 + c_2 = x$

$c_1 = \frac{x+y}{2}, \quad c_2 = \frac{x-y}{2} \qquad c_1 - c_2 = y$

$\to \{ i, i+j, 2i-3j \}$ مستقل نیست ← پس پایه نیست.

$\to \{ i+j, 2i+2j \}$

$c_1(i+j)+c_2(2i+2j)=(x,y) \to \begin{cases} c_1+2c_2=x \\ c_1+2c_2=y \end{cases} \to 0=x-y$

دارای هر دو نقطه جواب ندارد ← پس $\mathbb{R}^2$ را تولید نمی‌کند ⇐ پایه نیست

مثال: $\to \{ P_n \quad n \leq 2 \}$ پایه برای این فضا؟

$\{1, x, x^2\} \to ax^2+bx+c$: شکل کلی $\quad \underline{\dim(V)=3}$

$\to \{ 1, x-x^2, x^2+x+1 \}$

$c_1(1)+c_2(x-x^2)+c_3(x^2+x+1)=ax^2+bx+c$

$$\begin{cases} c_1+c_3=c \\ c_2+c_3=b \\ c_3-c_2=a \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \qquad |A|=2$$

مثال: اگر V فضای تمام چندجمله‌ای‌های درجه حداکثر 2 باشد به طوری که $f(0)=f(1)$ باشد، پایه برای V بیابید.

① ax^2+bx+c

② $f(0)=f(1) \to c=a+b+c \to \underline{a=-b}$

①② $\to -bx^2+bx+c \to b(-x^2+x)+c$

$\{-x^2+x, c\} \qquad \dim(V)=2$

نکته:

- بعد فضای صفر: مجموعه $\{0\}$ (پایه ندارد) تعریف می‌شود $\dim(V)=0$

- پایه‌های مختلف یک فضای خطی دارای یک تعداد عضو هستند.

مثال: اگر V مجموعه تمامی بردارهای (x,y,z) باشد که $x=0$ و $y+z=0$ است. یک پایه برای آن مثال بنویسید.

(x,y,z)

$\hookrightarrow (0,-z,z) = z(0,-1,1)$ استقلال خطی

پایه: $\{(0,-1,1)\} \rightarrow \dim(V)=1$

مثال: تمام (x,y,z) هایی که $2x+y-z=0$:

$(x,y,z) \qquad z=2x+y$

$\hookrightarrow (x,y,2x+y) = (x,0,2x)+(0,y,y)$

$\Rightarrow x(1,0,2)+y(0,1,1) \Longrightarrow$ پایه: $\{(1,0,2),(0,1,1)\}$

$\dim(V)=2$

مؤلفه: فرض کنید V یک فضای خطی باشد با بعد n و $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ پایه‌ای دلخواه آن باشد هر $x\in V$ را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$x = c_1e_1+c_2e_2+\dots+c_ne_n \quad (c_i\in\mathbb{R})$$

اعداد c_1 تا c_n را مؤلفه‌های x در پایه $\{e_1,\dots,e_n\}$ می‌نامند.

مثال: در فضای $V=\mathbb{R}^3$ بردار x بصورت $x=3i-2j+5k$ می‌باشد.

الف) مؤلفه‌های x در پایه $\{i,j,k\}$ را بنویسید.

ب) مؤلفه‌های x در پایه $\{i-j,2j-k\}$ را بنویسید.

الف) $\{3, -2, 5\}$

ب) $x = 3i - 2j + 5k = c_1(i - j) + c_2(2j) + c_3(-k)$

$$\begin{cases} c_1 = 3 \\ 2c_2 - c_1 = -2 \\ -c_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow (3, 1/2, -5)$$

مثال: مولفه‌ها چند جمله‌ای $P(x) = x^2 - x + 2$ را در پایه $\{x^2, x^2 - x, 2\}$ بیان کنید.

$$x^2 - x + 2 = c_1(2) + c_2(x^2 - x) + c_3(x^2)$$

$$\begin{cases} 1 = c_3 + c_2 \rightarrow c_3 = 0 \\ -1 = -c_2 \rightarrow c_2 = 1 \\ 2 = 2c_1 \rightarrow c_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow (1, 1, 0)$$

قضیه: در فضای خطی V، مولفه‌ها عنصر x در پایه $\{e_1, \dots, e_n\}$ یکتاست.

اثبات: فرض کنیم اینطور نیست.

$$x = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n$$

$$- \quad x = d_1 e_1 + d_2 e_2 + \dots + d_n e_n$$

$$\Rightarrow 0 = (c_1 - d_1) e_1 + (c_2 - d_2) e_2 + \dots + (c_n - e_n) e_n$$

چون $\{e_1, \dots, e_n\}$ پایه هست ← پس مستقل است. پس ترکیب خطی آنها زمانی صفر می‌شود ← که تمامی ضرایب صفر شود.

$c_1 - d_1 = 0 \rightarrow c_1 = d_1$

$\vdots$

$c_n - d_n = 0 \rightarrow c_n = d_n$

Note

ضرب داخلی : فرض کنیم فضای خطی V دارای ضرب داخلی است. هرگاه به ازای x و y در V ،
اسکالری مانند $\langle x,y\rangle$ وجود داشته باشد که در ۴ شرط زیر صدق کند.

1. $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

2. $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

3. $\langle cx,y\rangle = c\langle x,y\rangle \quad (c \in \mathbb{R})$

4. باشد $x \neq 0$ if : $\langle x,x\rangle > 0$

مثال : آیا ضرب داخلی معمولی تعریف شده برای دو بردار $x=(x_1,x_2,x_3)$ ،
$y=(y_1,y_2,y_3)$ در تعریف ضرب داخلی صدق می‌کند؟

$x=(x_1,x_2,x_3)$

$y=(y_1,y_2,y_3)$

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \sum x_iy_i$$

① $\langle x,y\rangle = \sum x_iy_i$ ✓

$\langle y,x\rangle = \sum y_ix_i$

② $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$ ✓

$\langle \quad \rangle = \sum x_i(y_i+z_i)$

$\langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle = \sum x_iy_i + \sum x_iz_i$

③ $\langle cx,y\rangle = c\langle x,y\rangle \to \sum (cx_i)y_i = c\sum x_iy_i$ ✓

④ $\langle x,x\rangle = \sum x_i^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ✓

$$\langle x , y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i |y_i|$$

$x = (1,1,1)$ $\quad \langle x , y \rangle = 3$

$y = (-1,-1,-1)$ $\quad \langle x , y \rangle = -3$

پس ضرب داخلی نیست.

بررسی شرط 2b:

$$\langle x , y + z \rangle = \langle x , y \rangle + \langle x , z \rangle$$

$$\langle x , y + z \rangle = \langle x , y \rangle + \langle x , z \rangle$$

$$\langle x , x , z \rangle = \sum x_i |y_i + z_i|$$

$$\langle x , y \rangle + \langle x , z \rangle = \sum x_i |y_i| + \sum x_i |z_i|$$

$$|y_i| + |z_i| \neq |y_i + z_i|$$