فضای خطی (برداری) :

فرض کنید V مجموعه‌ای ناتهی از اشیا که عنصر نامیده می‌شوند باشد. V را در صورتی فضای خطی نامیده می‌شود که در 10 اصل موضوع زیر صدق کند.

مهم ① بسته بودن نسبت به جمع :

$\forall x,y \in V \Rightarrow x+y \in V$

مهم ② بسته بودن به ضرب در اعداد حقیقی :

$\forall x \in V \quad \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow ax \in V$

③ تعویض پذیری :

$\forall x,y \in V - x+y = y+x$

④ شرکت پذیری :

$\forall x,z,y \in V \quad (x+y)+z = x+(y+z)$

مهم ⑤ وجود عنصر صفر (O) :

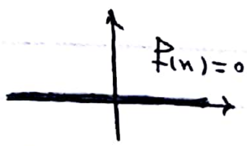
عنصری در V وجود داشته باشد که هرگاه با هر عنصری جمع شود، نتیجه خود آن عنصر باشد.

$x + O = x$

دقت کنید! که صفر هر مجموعه از جنس اعضای آن مجموعه است. مثلا برای بردارهای (x,y,z) :

$O : (0,0,0)$

صفر توابع : تابع $f(x)=0$



مهم ⑥ وجود عنصر قرینه : به ازای هر $x \in V$، عنصری وجود دارد که وقتی با x جمع شود، نتیجه صفر شود:

$x + (-1)(x) = O$

۷) به ازای

$$\begin{cases} \forall a,b \in \mathbb{R} \\ \forall x \in V \end{cases} \Rightarrow a(bx) = (ab)x$$

۸)

$$\begin{cases} \forall a,b \in \mathbb{R} \\ \forall x \in V \end{cases} \Rightarrow (a+b)x = ax + bx$$

۹)

$$\begin{cases} \forall a,b \in \mathbb{R} \\ \forall x \in V \end{cases} \Rightarrow a(x+y) = ax + ay$$

۱۰) وجود همانی:

$$\forall x \in V \rightarrow 1x = x$$

در تمامی ۱۰ مورد واضح است x, y, z : بردار هستند و (a, b) اسکالر هستند

مثال: اگر V به صورت زیر تعریف شود و جمع و ضرب همان جمع و ضرب معمولی باشد، خطی بودن V را بررسی کنید.

- تمام توابع $f(x)$ به طوریکه $f(1) = 2$

① $f(x) \in V \rightarrow f(1) = 2$

$g(x) \in V \rightarrow g(1) = 2$

$$\Bigg\} \; (f+g)(1) = 4 \notin V$$

Note

② $f_{(x)} \in V$, $f(1) = 2$ $\rightarrow a f_{(x)} = 2a \notin V$

③ ✓ ④ ✓ ⑤ عنصر 0 وجود ندارد ⑥ عنصر قرینه وجود ندارد

⑦ ✓ ⑧ ✓ ⑨ ✓ ⑩ ✓

- تمام توابع $f(x)$ بطوریکه $f(1) = 0$

① $f(1) = 0$, $g(1) = 0$ $\Big|$ $(f+g)(1) = 0$ ✓

② $f(1) = 0 \rightarrow a f(1) = 0 \Rightarrow a f_{(x)} \in V$ ✓

③ ✓ , ④ ✓ , ⑤ ✓

⑥ $f_{(x)} \in V \rightarrow f(1) = 0$

$-f(1) = 0 \Rightarrow [-f_{(x)}] \in V$

⑦ ✓ ⑧ ✓ ⑨ ✓ ⑩ ✓

- تمام چندجمله‌ای‌ها درجه 3 :

$ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\begin{cases} -x^3 + 1 \\ x^3 + 2x \end{cases} + \rightarrow (2x+1) \notin V$

نسبت به جمع بسته نیست.

یادداشت

- تمام چندجمله ای ها حداکثر درجه 3 : فضای خطی

- تمام بردارهای x و y و z به طوری که $x=1$: $(1, y, z)$

خطی نیست ← عنصر 0 ندارد. نسبت به جمع بسته نیست.

- تمام بردارهای (x, y, z) که $x=0$: خطی هست.

- تمام بردارهای (x, y, z) که $x+y+z=0$: فضای خطی ✓

- تمام بردارهای (x, y, z) که $x+y+z=1$: عنصر صفر وجود ندارد.

یکتایی عنصر صفر:

قضیه: هر فضای خطی فقط و فقط یک عنصر صفر دارد.

فرض کنید: فضای خطی V دارای دو عنصر O_1 و O_2 می‌باشد.

می‌دانیم به ازای هر عنصر دلخواه x : $x+O=x$

یکبار: $x=O_2$ و $O=O_1$ $\Leftarrow$ $x+O=x \rightarrow \underline{O_2+O_1=O_2}$

و بار دیگر: $x=O_1$ و $O=O_2$

$x+O=x \rightarrow \underline{O_1+O_2=O_1}$

چون V خطی است $(x+y=y+x)$. ← $O_1+O_2=O_2+O_1$

$\Rightarrow \underline{O_1=O_2}$

Note

اگر x, y اعضای فضای خطی V بوده و $a,b \in \mathbb{R}$ باشد :

صفر برداری

1. $0x = 0$

2. $a0 = 0$

3. $ax = 0 \begin{cases} a = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ یا

4. $x + x = 2x$

به طور کلی : $\sum_{i=1}^{n} x = nx$

اثبات ۱ :

z را برابر $z = 0x$ در نظر گرفته و اثبات می‌کنیم $z = 0$ است .

$$z + z = 0x + 0x = (0+0)x = 0x$$

$$z + z = z \Rightarrow \text{طرفین را با قرینه } z \text{ جمع می‌کنیم} \Rightarrow z + z + (-1)z = z + (-1)z$$

$$\Rightarrow z + 0 = 0 \quad \rightarrow \underline{z = 0}$$

چند نکته :

- مجموعه تمام توابع پیوسته در بازه $[a,b]$ = $C(a,b)$ نشان داده می‌شود

مثال : $C(0,2)$ خطی = ? ✓

- تمام چند جمله‌ای های مرتبه n : P_n نشان داده می‌شود .

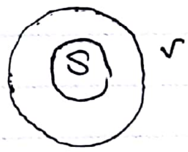
مثال : $P_n \quad n = 3$ خطی = ? X

$P_n \quad (n \leqslant 3)$ خطی = ? ✓

✓ ?: خطی   تمامی بردارهای (x,y,z): فضای $\mathbb{R}^3$: اشکال

تعریف: زیرفضا: فرض کنید V فضای خطی بوده و S زیرمجموعه‌ای از V باشد؛ اگر S خطی باشد. آن را زیرفضای V می‌نامیم.

قضیه: فرض کنید V فضای خطی باشد و S زیرمجموعه‌ای از آن باشد آنگاه S خطی است (زیرفضای V است) اگر و تنها اگر در 2 اصل موضوع بسته بودن (جمع و ضرب) صدق کند.



چون اعضای S، اعضای V نیز هستند. پس اصل 3 و 4، 7، 8، 9 و 10 برقرار است. پس فقط ۴ اصل می‌ماند:

۱) بسته بودن نسبت به جمع

۲) بسته بودن نسبت به ضرب اسکالر

۳) داشتن عنصر صفر

۴) داشتن عنصر قرینه.

اثبات ۳: چون S نسبت به ضرب اسکالر بسته است. پس $0 = 0x$ در داخل S وجود دارد پس S حتما عنصر صفر دارد.

اثبات ۴: چون S نسبت به ضرب اسکالر بسته است. به ازای هر x، عنصر $(-1)(x)$ در S موجود است. به راحتی اثبات می‌شود که $(-1)(x)$ همان قرینه x است.

$$x + (-1)(x) = (1-1)x = 0x = 0$$

Note

مثال: اگر S، مجموعه تمام بردارها (x, y, z) باشد بطوریکه $2x+y-z=0$ شود. آیا S خطی است؟

چون S زیرمجموعه $\mathbb{R}^3$ است و چون $\mathbb{R}^3$ خطی است، پس کافی است تنها ۲ اصل بسته بودن را بررسی کنیم.

$$(x_1, y_1, z_1) \in S \rightarrow 2x_1+y_1-z_1=0$$

$$(x_2, y_2, z_2) \in S \rightarrow 2x_2+y_2-z_2=0$$

$$2(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2)=0$$

$$\rightarrow 2X+Y-Z=0$$ نسبت به جمع بسته است

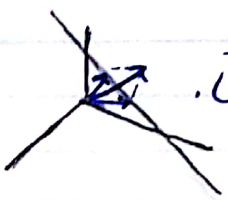
(kx_1, ky_1, kz_1)

$$2(kx_1)+(ky_1)-(kz_1)=0 \rightarrow 2x_1+y_1-z_1=0 \checkmark$$

پس نسبت به ضرب اسکالر بسته است. پس S خطی است $\Leftarrow$ پس S زیرفضای $\mathbb{R}^3$ است.

تعبیر هندسی

$2x+y-z=1$ عنصر صفر ندارد ← خطی نیست



انتهای بردار در صفحه نیست.

صفحات از $\mathbb{R}^3$ زیرفضا هستند که از مبدأ عبور کنند.

- S تمام توابع پیوسته در بازه‌ی $[1,2]$ $\left(C(1,2) \right)$ بطوریکه : $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$

$$\int_1^2 f\,dx = 5$$

$$+\ \int_1^2 g\,dx = 5$$

$$\overline{\int_1^2 (f+g)\,dx = 10} \rightarrow f+g \notin S$$

- $\int_1^2 f(x)\,dx = 0$

$$\Rightarrow \int_1^2 f\,dx = 0$$

$$+\ \int_1^2 g\,dx = 0$$

$$\overline{\int_1^2 (f+g)\,dx = 0} \rightarrow \underline{f+g \in S}\,,$$

$$\int_1^2 k\,f(x)\,dx = 0$$

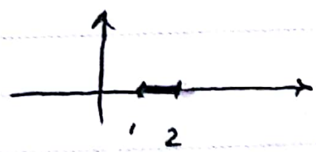
- $\int_1^2 f^3\,dx = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f \in S \rightarrow \int_1^2 f^3\,dx = 0 \\ g \in S \rightarrow \int_1^2 g^3\,dx = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \int_1^2 (f^3+g^3)\,dx = 0$$

$$\hookrightarrow f+g \notin S.$$

$$(f+g)^3 \neq f^3+g^3$$

- $\int_1^2 f^2\,dx = 0$



این مجموعه فقط شامل تابع صفر است. پس خطی است.

در مجموعه‌ها کلی شامل فقط عضو 0 خطی است.

Note

ترکیب خطی: یک مجموعه‌ی ناتهی w را به صورت $w = \{x_1, \dots, x_n\}$ را در فضای خطی در نظر بگیرید. عنصر x که به صورت زیر تعریف می‌شود. ترکیب خطی عناصر w نامیده می‌شود.

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$

$$x = \sum C_i x_i \qquad \underline{C_i \in \mathbb{R}},$$

تعریف: اگر همه‌ی ترکیبات خطی w را بنویسیم. مجموعه‌ای به دست می‌آید که آن را پیمای w فضای پیموده شده توسط w و با $L(w)$ نشان می‌دهیم.

if: $w = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ $\quad L(w) = \mathbb{R}^2$ صفحه

$$L(w) = C_1 \vec{i} + C_2 \vec{j}$$

if: $w = \{\vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + \vec{j}\}$ $\quad L(w) = \mathbb{R}^2$

if: $w = \{1, x, x^2\}$ $\quad L(w) = P_n \quad n \leq 2$ تمام چندجمله‌ای‌ها از مرتبه حداکثر 2.

آیا $L(w)$ یک فضای خطی است؟

$$A_1 : a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \in L(w)$$

$$A_2 : b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n \in L(w)$$

$$A_1 + A_2 = (a_1 + b_1) x_1 + (a_2 + b_2) x_2 + \dots + (a_n + b_n) x_n \in L(w)$$

$$kA_1 = k a_1 x_1 + k a_2 x_2 + \dots + k a_n x_n \in L(w)$$