روش های کمی در تصمیم گیری مدیران

دکتر حنان عموزاد

تعداد واحد : سه واحد نظری

برنامه درسی – سناریوی دوم

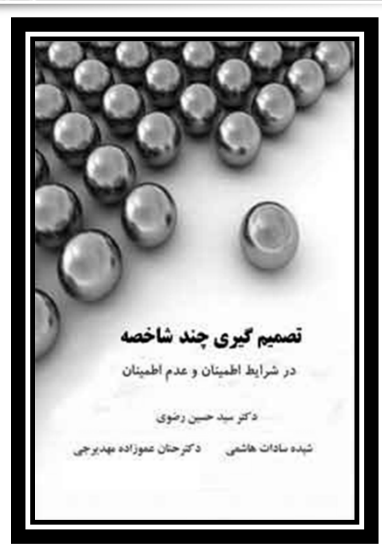
ردیف	موضوع	تعداد جلسات	توضیحات
۱	فرایند کلی	۱	❋
۲	روش های بی مقیاس سازی و وزن دهی	۲	❋
۳	روش های حالت قطعیت	۳	❋
۴	رویکرد های عدم قطعیت	۳	❋
۵	روش های حالت عدم قطعیت	۳	❋
۶	مدل های چند هدفه	۲	❋
۷	برنامه ریزی آرمانی	۲	❋
۸	تحلیل پوششی داده ها	۱	❋

عناوین پیشنهادی پروژه ها

ردیف	موضوع
۱	**الگوریتم جستجوی ممنوعه** (TS)
۲	**الگوریتم ژنتیک** (GA)
۳	**الگوریتم کلونی مصنوعی زنبور عسل** (ABC)
۴	**الگوریتم شبکه عصبی** (ANN)
۵	**الگوریتم کلونی مورچگان** (ACA)
۶	**الگوریتم رقابت استعماری** (ICA)
۷	**الگوریتم کرم شب تاب** (FA)
۸	**الگوریتم شبیه سازی تبریدی** (SA)
۹	**آموزش نرم افزار** AIMMS
۱۰	**آموزش حل هر یک از روش های متاهیوریستیک با نرم افزار** MATLAB
۱۱	**تحلیل مقاله های نوین مرتبط**

Page ▪ 3

منابع درس



Page ▪ 4

نظریه مطلوبیت

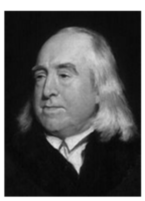
- مطلوبیت شاخصی است که رضایت یک مصرف کننده از مصرف کالا یا خدمتی خاص را نشان می‌دهد.
- مکتب مطلوبیت گرایی، بیشینه‌سازی مطلوبیت را ملاکی اخلاقی برای شکل‌گیری جامعه می‌داند.
- مطلوبیت گرایانی نظیر جرمی بنتام و جان استوارت میل معتقدند جامعه باید سعی در بیشینه‌سازی مطلوبیت تک تک اعضای خویش و خلق "بالاترین رضایت برای بیشترین تعداد افراد ممکن" داشته باشد.
- کاربرد نظریه مطلوبیت در تصمیم‌گیری چند شاخصه نیز به همان معنای آن در اقتصاد اشاره دارد.
- بر اساس نظریه مطلوبیت، فرد (تصمیم گیرنده) به گونه‌ای نسبت به انتخاب از میان مجموعه‌ای از گزینه‌ها اقدام می‌کند که رضایت حاصل از انتخاب خود را به بالاترین سطح ممکن برساند.

جان استورات میل

- ۱۸۰۶-۱۸۷۳؛
- متولد بریتانیا و متوفی در فرانسه؛
- سیاست مدار؛ فیلسوف؛ نویسنده؛ اقتصاد دان؛
- پدر لیبرالیسم؛ حق طبیعی و حق مدنی؛
- بزرگترین احترام به خداوند این است که بگوییم چیزی نمی‌دانیم؛
- کسانی خوشبخت هستند که فکر و اندیشه شان بسوی چیزی غیر از خوشبختی خودشان است؛
- ایام از افراد خطاپذیرترند. هر دورانی دارای عقایدی است که از نظر دوران بعدی اش، نه تنها نادرست بلکه احمقانه محسوب می شود؛
- اگرچه این درست نیست که همه محافظه کاران، افراد نادانی هستند؛ اما این حقیقت است که اکثر افراد نادان، محافظه کار هستند؛
- آنچه که عموم مردم را از اقلیت جدا می کند، ناتوانی آنها در عملکرد مطابق عقایدشان است.

Page • 7

جرمی بنتام



- بنیانگذار فایده‌گرایی؛
- ۱۷۴۸-۱۸۳۲؛
- وفات و مرگ در لندن؛
- معتقد بود که جستجوی لذت و گریز از درد، تنها غایت و هدف آدمی است حتی در لحظه ای که انسان بزرگترین لذت را از خود دریغ می کند و یا دردهای سنگینی را بر خود هموار میکند نیز به دنبال لذتی دیگر است.

نظریه مطلوبیت – ادامه

- نظریه مطلوبیت چند شاخصه اغلب زمانی استفاده می‌شود که *ریسک و عدم قطعیت نقشی اساسی* در تعریف و ارزیابی گزینه‌ها داشته باشد.
- تمرکز این روش بر ساختار گزینه‌های چند معیاره یا چند شاخصه در شرایط ریسک و عدم اطمینان و بر مبنای شیوه‌هایی برای ارزیابی ارزشهای فردی و احتمالات ذهنی است.
- نقطه تمایز در نقش تابع ارزش است. به طور کلی در نظریه مطلوبیت چند شاخصه، تابع ارزش تصمیم گیرنده عینی و آشکار در نظر گرفته می‌شود در حالی که سایر روشهای تصمیم‌گیری چند شاخصه نیازی به این تابع ندارند.

نظریه مطلوبیت – ادامه

- این نظریه مجموعه‌ای از قضاوتهای ذهنی و روشهای امتیازدهی را به منظور ارزیابی گزینه‌ها بر حسب چندین شاخص با یکدیگر ترکیب می‌کند.
- کاربرد مفهوم مطلوبیت در نظریه تصمیم‌گیری : که اگر مطلوبیت مناسبی به هر یک از نتایج ممکن اختصاص و مطلوبیت مورد انتظار هر گزینه محاسبه شود، آنگاه گزینه‌ای با بالاترین مطلوبیت به عنوان بهترین گزینه انتخاب می‌شود.
- گزینه انتخابی بر این اساس بیشترین همخوانی را با خواسته‌های تصمیم گیرنده خواهد داشت.

Page ۰ 10

تابع مطلوبیت

- تابع مطلوبیت در واقع ابزاری برای بیان ترجیحات به زبان ریاضی است.
- این تابع در واقع ترجیحات تصمیم گیرنده را به صورت تابعی از شاخصهای تصمیم‌گیری نشان می‌دهد.
- چنانچه ترجیحات تصمیم گیرنده را جویا شویم، پاسخ او بر اساس تابع مشخص و نامعلومی مانند U خواهد بود.
- در این میان نقش تحلیل‌گر آن است که با طرح سوالات مناسب از تصمیم گیرنده، نسبت به ارائه برآوردی از این تابع اقدام نماید.

$$U = U(g_1, g_2, \ldots, g_n)$$

تابع مطلوبیت جمعی

- اشکال متفاوتی برای تابع مطلوبیت به صورت جمعی، ضربی، ترکیبی و غیره در نظر گرفته می‌شود.
- کاربرد هر یک مستلزم فرضیات خاصی است.
- ساده ترین و پرکاربردترین شکل تحلیلی تابع مطلوبیت، مدل جمعی است.

$$U(a) = \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot U_j(g_j(a))$$

$U(a)$	مطلوبیت گزینه a است که به صورت مجموع مطلوبیت این گزینه در n شاخص تصمیم‌گیری تعریف شده است.
$U_j(g_j(a))$	مطلوبیت گزینه a در شاخص مربوطه را نشان می‌دهد که توابعی حقیقی و اکیداً صعودی است.
k_j	ضرایب ثابت و مثبت

Page • 12

تابع مطلوبیت جمعی – ادامه

- یک فرض اساسی برای استفاده از شکل جمع‌پذیر آن است که شاخصهای تصمیم‌گیری باید دارای استقلال ترجیحاتی باشند.
- اگر F مجموعه شاخصهای تصمیم‌گیری، J زیرمجموعه‌ای از F و "جِی‌بار" متمم این زیر مجموعه باشد، J دارای استقلال ترجیحاتی در F است، اگر ترجیحات بین گزینه‌هایی که تنها در معیارهای J با یکدیگر متفاوت هستند، بستگی به معیارهای "جِی‌بار" نداشته باشد.

روش مجموع ساده وزنی

- در این روش برای هر گزینه امتیازی محاسبه شده و گزینه‌ها بر حسب این امتیاز رتبه‌بندی می‌شوند.

$$A^* = \left\{F_i^* \middle| F_i^* = \max_{i=1,2,\ldots,m} \{F_i\}\right\}$$

- در ساده‌ترین حالت این روش، امتیاز هر گزینه به صورت متوسط وزنی امتیاز گزینه در شاخصهای تصمیم‌گیری تعریف می‌شود

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} w_j r_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1,\ w_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,n$$

مجموع ساده وزنی – ادامه

- در این روش به منظور بی مقیاس‌سازی ماتریس تصمیم‌گیری از روش خطی استفاده می‌شود.
- با تبدیل امتیاز گزینه‌ها در شاخصهای تصمیم‌گیری به مقادیر بی مقیاس شده، امتیاز هر گزینه محاسبه می‌گردد.
- این رابطه در واقع تخمینی از یک تابع مطلوبیت خطی و جمع‌پذیر است.
- کاربرد این روش تنها زمانی توصیه می‌شود که فرض استقلال ترجیحاتی میان شاخصها برقرار باشد.
- در واقع سهم هر شاخص در امتیاز کلی نباید توسط شاخصهای دیگر تشدید یا تضعیف شود.

$$F_i = \prod_{j=1}^{n} \left(n_{ij}\right)^{w_j}$$

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} w_j n_{ij}$$

مثال

شاخص / گزینه	سود خالص	بهره برداران	پایداری جغرافیایی
A_1	۹۹,۶	۴	۷۰
A_2	۸۵,۷	۱۹	۵۰
A_3	۱۰۱,۱	۴۰	۱۰
A_4	۹۵,۱	۵۰	۲۰

شاخص / گزینه	سود خالص	بهره برداران	پایداری جغرافیایی
A_1	۰,۹۰۳	۰	۱
A_2	۰	۰,۳۲۶	۰,۶۶۷
A_3	۱	۰,۷۸۳	۰
A_4	۰,۶۱۰	۱	۰,۱۶۷

مجموع ساده وزنی خاکستری

G-SAW

- تشکیل ماتریس تصمیم گیری خاکستری؛
- بی مقایاس سازی خاکستری؛

$$\left[\underline{n}_{ij}, \overline{n}_{ij}\right] = \left[\frac{\underline{r}_{ij}}{\max\limits_i \underline{r}_{ij}}, \frac{\overline{r}_{ij}}{\max\limits_i \underline{r}_{ij}}\right]$$

$$\left[\underline{n}_{ij}, \overline{n}_{ij}\right] = \left[\frac{\min\limits_i \overline{r}_{ij}}{\overline{r}_{ij}}, \frac{\min\limits_i \overline{r}_{ij}}{\underline{r}_{ij}}\right]$$

- محاسبه وزن و اهمیت هر شاخص؛

$$\otimes w_j = \left[\underline{w}_j, \overline{w}_j\right]$$

- محاسبه ماتریس موزون نرمال؛

$$\otimes v_{ij} = \otimes w_j \cdot \otimes n_{ij} = \left[\underline{v}_{ij}, \overline{v}_{ij}\right]$$

مجموع ساده وزنی خاکستری – ادامه

G-SAW

- محاسبه امیاز نهایی هر گزینه؛
- رتبه بندی.

$$F_i = \frac{۱}{n}\sum_{j=۱}^{n} \frac{\underline{v}_{ij} + \overline{v}_{ij}}{۲}$$

مثال

- انتخاب پیمانکار پروژه‌های ساختمانی؛
- این مسئله شامل ارزیابی پنج پیمانکار بر حسب شش معیار اولی تجربه (سال)، دومی تعداد پروژه‌های به اتمام رسیده (در فاصله سالهای ۲۰۰۸–۲۰۰۵)، سومی مجموع گردش مالی (میلیون دلار در فاصله ۲۰۰۸–۲۰۰۵)، چهارمی مجموع تعداد مدیران (نفر در فاصله سالهای ۲۰۰۸–۲۰۰۵)، پنجمی سهم بازار و شش شیوه تولید بوده است؛
- در این میان تنها معیار چهارم از جنس هزینه و سایر معیارها از جنس سود می‌باشند.

Page • 19

مثال – ادامه

گزینه‌ها	معیارها											
	$\otimes g_1$		$\otimes g_2$		$\otimes g_3$		$\otimes g_4$		$\otimes g_5$		$\otimes g_6$	
جهت	سود		سود		سود		هزینه		سود		سود	
A_1	۱۱	۱۵	۱۰	۱۵	۳,۳۰	۴,۵	۳۵	۴۸	۰,۱۵۲	۰,۲۰۳	۱	۲
A_2	۱۰	۱۴	۷	۱۳	۲,۵۴	۳,۶۸	۴۰	۵۸	۰,۱۱۱	۰,۱۶۲	۱	۲
A_3	۱۴	۱۸	۵	۹	۱,۹۵	۲,۴۶	۴۲	۵۳	۰,۰۷۹	۰,۱۲۱	۱	۳
A_4	۱۲	۱۶	۱	۴	۰,۴۲	۱,۹۵	۱۵	۶۳	۰,۰۱	۰,۰۵۴	۱	۲
A_5	۶	۱۰	۲	۹	۰,۶۲	۰,۴۲	۱۰	۴۶	۰,۰۱۲	۰,۱۲۲	۱	۲
بهینه	۱۸		۱۵		۴,۵		۱۰		۰,۲۰۳		۳	

مجموع ساده وزنی فازی

FSAW

■ اولین گام برای حل مسئله با روش ، بی مقیاس سازی ماتریس تصمیم‌گیری است.

$$\widetilde{W} = \left(\widetilde{w}_۱, \widetilde{w}_۲, \ldots, \widetilde{w}_n\right)$$

$$\widetilde{R} = \left[\widetilde{r}_{ij}\right]$$

مجموع ساده وزنی

■ گام اول: بی مقیاس سازی ماتریس تصمیم‌گیری

– روش اول

$$for \quad C^+ \rightarrow \widetilde{n}_{ij} = \frac{\widetilde{r}_{ij}}{\widetilde{r}_j^*}$$

$$\widetilde{r}_j^* = \max_i \widetilde{r}_{ij}$$

$$۰ \leq \widetilde{n}_{ij} \leq ۱$$

$$for \quad C^- \rightarrow \widetilde{n}_{ij} = \frac{۱/\widetilde{r}_{ij}}{۱/\widetilde{r}_j^*} = \frac{\min_i \widetilde{r}_{ij}}{\widetilde{r}_{ij}}$$

مجموع ساده وزنی

- گام اول: بی مقیاس سازی ماتریس تصمیم‌گیری
  - روش دوم

$$for \quad C^{+} \rightarrow \tilde{n}_{ij} = \frac{\tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_j^{-}}{\tilde{r}_j^{*} - \tilde{r}_j^{-}}$$

$$\tilde{r}_j^{-} = \min_i \tilde{r}_{ij}$$

$$for \quad C^{-} \rightarrow \tilde{n}_{ij} = \frac{\tilde{r}_j^{*} - \tilde{r}_{ij}}{\tilde{r}_j^{*} - \tilde{r}_j^{-}}$$

- گام دوم: محاسبه امتیاز هر گزینه

$$\tilde{F}_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{w}_j \cdot \tilde{n}_{ij}$$

- گام سوم: مقایسه امتیاز گزینه‌ها

مثال

گزینه‌ها	معیارها			
	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	(۷۷.۵، ۵۷.۵، ۴۲.۵، ۲۲.۵)	(۶۲.۵، ۴۲.۵، ۳۵، ۱۵)	(۱۰۰، ۸۰، ۷۲.۵، ۵۲.۵)	(۶۶.۷، ۶۲.۹، ۴۸.۹، ۴۶.۸)
A_2	(۹۲.۵، ۷۷.۵، ۷۰، ۵۰)	(۷۰، ۵۰، ۴۲.۵، ۲۲.۵)	(۸۵، ۷۰، ۵۵، ۳۵)	(۱۰۰، ۸۸، ۷۳.۳، ۶۸.۸)
A_3	(۸۵، ۶۵، ۴۲.۵، ۲۲.۵)	(۹۲.۵، ۷۲.۵، ۵۰، ۳۰)	(۸۵، ۶۵، ۵۰، ۳۰)	(۱۰۰، ۸۴.۶، ۸۴.۶، ۷۸.۶)

پیش فرض اساسی در کاربرد روش مجموع ساده وزنی، استقلال شاخصها است
برود به ابتدای درس مرتبط با آموزش آزمون استقلال

اهمیت نسبی معیارهای اول تا چهارم به ترتیب برابر با ۰.۲۱۱، ۰.۲۴۵، ۰.۲۶۵ و ۰.۲۷۹

معرفی اولیه

Analytic Hierarchy Process

- فرآیند تحلیل سلسله مراتبی اولین بار در سال ۱۹۷۷ توسط توماس ال ساتی ارائه گردید.
- همخوانی منطقی و شهودی زیادی با شیوه ذهنی انتخاب یک گزینه از میان مجموعه ای از گزینه ها بر حسب چندین معیار دارد.
- تصمیم گیرنده انتخاب خود را بر مجموعه ای از مقایسه های زوجی استوار میسازد که با استفاده از آنها اولویت کلی گزینه ها مشخص می‌گردد.
- با در نظر گرفتن امکان وقوع ناسازگاری در قضاوت های انسانی، ابزاری برای سنجش و بهبود آن فراهم می سازد.

معرفی بنیانگذار

Analytic Hierarchy Process

Born: 1926, Mosul, Iraq (89 years old)
professor at the University of Pittsburgh

Education: Yale University

- **ANP**
- **AHP**
- **NNP**

Page • 27

مزایا از دید ساتی

۱. یگانگی و یکتایی مدل. فرآیند تحلیل سلسله مراتبی مدلی ساده، یگانه و منعطف برای حل محدوده وسیعی از مسائل بدون ساختار است که به راحتی برای همگان قابل درک می‌باشد.

۲. پیچیدگی. این روش در حل مسائل پیچیده، نگرش سیستمی و جزء به جزء را به صورت توام به کار می‌برد.

۳. همبستگی و وابستگی متقابل. این فرآیند وابستگی را به صورت خطی در نظر می‌گیرد.

۴. ساختار سلسله مراتبی. فرآیند تحلیل سلسله مراتبی اجزای یک سیستم را به صورت سلسله مراتبی سازماندهی می‌کند.

مزایا از دید ساتی – ادامه

۵. اندازه‌گیری. فرآیند تحلیل سلسله مراتبی مقیاسی برای اندازه‌گیری معیارهای کیفی ارائه می‌دهد.

۶. سازگاری. این روش سازگاری منطقی قضاوتهای استفاده شده در تعیین اولویت‌ها را محاسبه می‌کند.

۷. تلفیق. این روش رتبه نهایی هر گزینه را ارائه می‌دهد.

۸. تعادل. این روش امکان موازنه میان عوامل مختلف در یک مسئله تصمیم‌گیری را فراهم می‌آورد.

۹. قضاوت و توافق گروهی. این روش را می‌توان برای تلفیق قضاوتهای مختلف گروهی به کار برد.

۱۰. تکرار فرآیند. این روش امکان باز تعریف مسئله و بهبود قضاوتها را فراهم می‌آورد.

گام های اساسی

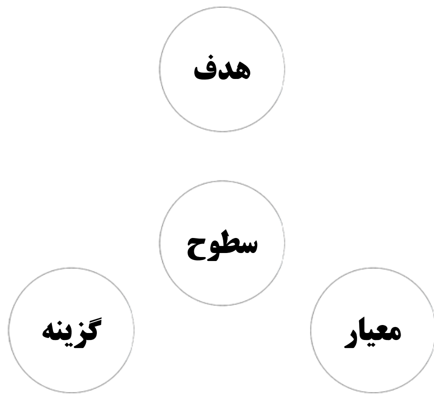
گام ۱) تشکیل ساختار سلسله مراتبی مسئله

گام ۲) مقایسه‌های زوجی

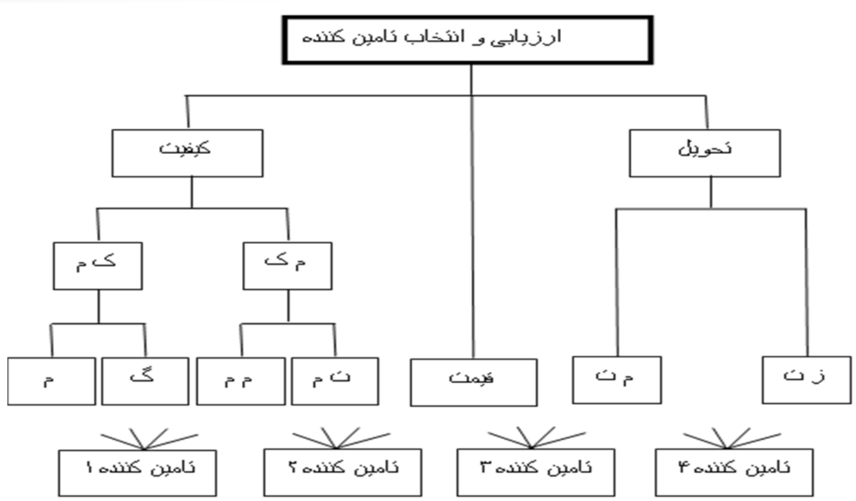
گام ۳) بررسی سازگاری تصمیمات

ساختار سلسله مراتبی

- آیا میتوان عناصر یک سطح پایینتر را بر حسب همه یا برخی عناصر یک سطح بالاتر از آن مقایسه نمود.
- حرکت از هدف به سمت گزینه ها.



مثال



Page • 32

الگوی طراحی ساختار

۱. تعیین هدف اصلی. سوال اصلی چیست؟ سعی در انجام چه کاری دارید؟

۲. تعیین اهداف فرعی با توجه به هدف اصلی. در صورت نیاز افق زمانی مسئله مورد بررسی را تعیین کنید.

۳. معیارهایی که برای رسیدن به هدف اصلی یا اهداف فرعی مسئله باید برآورده شوند را تعیین کنید.

۴. زیر معیارهای هر معیار را در صورت وجود تعریف کنید. به این نکته توجه داشته باشید که مقادیر معیارها یا زیر معیارها را باید بتوان بر حسب دامنه ای از مقادیر یا عبارات کلامی نظیر بالا، متوسط و پایین عنوان نمود.

۵. گزینه ها یا پیامدهای مورد نظر را مشخص کنید.

مقایسه های زوجی

- این مقایسهها شامل مقایسه دو گزینه نسبت به یک معیار (زیر معیار) و یا دو معیار (زیر معیار) نسبت به هدف اصلی (معیار مربوطه) است.
- در واقع عناصر هر سطح سلسله مراتبی نسبت به هر یک از عناصر مرتبط با خود در سطح بالاتر مقایسه شده و ترجیح یا اولویت آنها محاسبه میشود.

ترجیح تصمیم گیرنده	مقدار عددی
ارجحیت یا مطلوبیت برابر	۱
کمی ارجح یا مطلوبتر	۳
ترجیح یا مطلوبیت زیاد	۵
ترجیح یا مطلوبیت خیلی زیاد	۷
کاملاً ارجح یا کاملاً مطلوبتر	۹
ترجیحات میان مقادیر فوق	۸-۶-۴-۲

پرسشنامه و ماتریس

معیار/ گزینه	پرسشنامه مقایسه زوجی																	معیار/ گزینه
	۹	۸	۷	٦	٥	٤	٣	٢	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	
A																		B
A																		C
A																		D
A																		E
B																		C
B																		D
B																		E
C																		D
C																		E
D																		E

$$
P = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array}
$$

اصول مقایسات زوجی و استفاده از روش

- اصل ۱. تصمیم گیرنده قادر به مقایسه زوجی دو گزینه او زنسبت به یک معیار / زیر معیار در مقیاسی نسبی و معکوس پذیر است.
- اصل ۲. تصمیم گیرنده هرگز ترجیح یا اولویت یک عنصر نسبت به عنصر دیگر را بی نهایت در نظر نمیگیرد.
- اصل ۳. مسئله تصمیم را میتوان در قالب یک ساختار سلسله مراتبی تعریف نمود.
- اصل ۴. تمامی معیارها یا زیر معیارهای تاثیرگذار بر مسئله و تمامی گزینه های مورد نظر تنها در یک سطح از ساختار سلسله مراتبی قرار میگیرند.

مثال

معیار	A	B	C
A	۱	۱/۲	۱/۶
B	۲	۱	۱/۴
C	۶	۴	۱

سازگاری قضاوت ها

تعریف

$$P = [a_{ij}] \; i, j = ۱,۲,\ldots,n$$

$$a_{ik} \times a_{kj} = a_{ij}, \; i, j, k = ۱,۲,\ldots,n$$

مراحل

$$Pw = \lambda_{\max} w$$

$$|P - \lambda I| = ۰$$

اگر تصمیم گیرنده در قضاوتهای خود کاملاً سازگار باشد، در این صورت حداکثر مقادیر ویژه ماتریس مقایسه زوجی او برابر با بُعد ماتریس خواهد بود

$$\lambda_{max} = n$$

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - ۱}$$

سازگاری قضاوت ها – ادامه

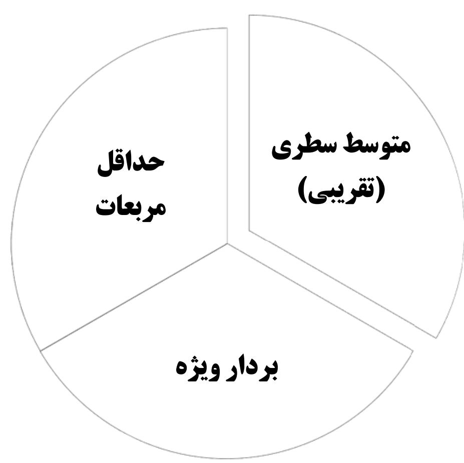
- شاخص تصادفی متوسط مقادیر نمونه بزرگی از ماتریس های مقایسه زوجی متشکل از n عنصر است که مقادیر خود را در فاصله ۹/۱ تا ۹ به صورت تصادفی اختیار کرده اند.

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
RI	۰	۰	۰.۵۲	۰.۸۹	۱.۱۱	۱.۲۵	۱.۳۵	۱.۴۰	۱.۴۵	۱.۴۹

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

شاخص سازگاری کوچکتر یا مساوی ۰.۱ قابل قبول است

روش های وزن دهی



روش بردار ویژه

$$(P-\lambda_{\max} I)w=۰$$

$$\sum_{1}^{n} w_i = 1$$

معیار	A	B	C
A	۱	۱/۲	۱/۶
B	۲	۱	۱/۴
C	۶	۴	۱

روش حداقل مربعات

$$\min \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\left(a_{ij}w_j - w_i\right)^۲$$
$$s.t.\ \sum_{i=۱}^{n} w_i = ۱$$
$$w_i \geq ۰, i=۱,۲,\ldots,n$$

$$L=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n}\left(a_{ij}w_j - w_i\right)^۲ + \lambda\left(\sum_{i=۱}^{n} w_i - ۱\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_l} = \sum_{i=۱}^{n} a_{il}\left(a_{il}w_l - w_i\right) - \sum_{j=۱}^{n}\left(a_{lj}w_j - w_l\right) + \lambda = ۰,\ \ l=۱,۲,\ldots,n$$

Page ۰ 42

روش حداقل مربعات – ادامه

$$\sum_{i=۱}^{n} a_{il}\left(a_{il}w_l - w_i\right) - \sum_{j=۱}^{n}\left(a_{lj}w_j - w_l\right) + \lambda = ۰,\ \ l = ۱,۲,\ldots,n$$

$$\sum_{i=۱}^{n} w_i = ۱$$

$$\begin{cases} \left(۱+a_{۲۱}^{۲}\right)w_{۱} - \left(a_{۱۲}+a_{۲۱}\right)w_{۲} + \lambda = ۰ \\ -\left(a_{۲۱}+a_{۱۲}\right)w_{۱} + \left(۱+a_{۱۲}^{۲}\right)w_{۲} + \lambda = ۰ \\ w_{۱} + w_{۲} = ۱ \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} ۲+a_{۲۱}^{۲}+a_{۳۱}^{۲} & -\left(a_{۱۲}+a_{۲۱}\right) & -\left(a_{۱۳}+a_{۳۱}\right) & ۱ \\ -\left(a_{۲۱}+a_{۱۲}\right) & ۲+a_{۱۲}^{۲}+a_{۳۲}^{۲} & -\left(a_{۲۳}+a_{۳۲}\right) & ۱ \\ -\left(a_{۳۱}+a_{۱۳}\right) & -\left(a_{۳۲}+a_{۲۳}\right) & ۲+a_{۱۳}^{۲}+a_{۲۳}^{۲} & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{۱} \\ w_{۲} \\ w_{۳} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

مثال

معیار	A	B	C
A	۱	۱/۲	۱/۶
B	۲	۱	۱/۴
C	۶	۴	۱

تحلیل سلسله مراتبی خاکستری

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \otimes_{12} & \cdots & \otimes_{1n} \\ \otimes_{21} & 1 & \cdots & \otimes_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \otimes_{n1} & \otimes_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\otimes_{ij} = \left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right], i, j = 1,2,\ldots,n, i \neq j$$

Page • 45

محاسبه اوزان

$$\underline{n}_{ij} = \frac{۲\underline{x}_{ij}}{\sum_{i=۱}^{n}\left(\underline{x}_{ij} + \overline{x}_{ij}\right)}$$

$$\overline{n}_{ij} = \frac{۲\overline{x}_{ij}}{\sum_{i=۱}^{n}\left(\underline{x}_{ij} + \overline{x}_{ij}\right)}$$

$$N = \begin{bmatrix} ۱ & \otimes n_{۱۲} & \cdots & \otimes n_{۱n} \\ \otimes n_{۲۱} & ۱ & \cdots & \otimes n_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \otimes n_{n۱} & \otimes n_{n۲} & \cdots & ۱ \end{bmatrix}$$

$$w_i = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\left(\underline{n}_{ij}, \overline{n}_{ij}\right)$$

سازگاری در حالت خاکستری

- ایریانتو در تحلیل خود به این نتیجه رسیده که با تغییر در قضاوتهای فاصله‌ای، مادامی که قضاوتهای جدید در دامنه قضاوتهای قبلی قرار داشته باشند، نتایج نهایی رتبه‌بندی تغییری نخواهد داشت.

Page • 47

تحلیل سلسله مراتبی فازی

$$\widetilde{P} = \begin{bmatrix} \widetilde{۱} & \widetilde{a}_{۱۲} & \dots & \widetilde{a}_{۱n} \\ \widetilde{a}_{۲۱} & \widetilde{۱} & \dots & \widetilde{a}_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{n۱} & \widetilde{a}_{n۲} & \dots & \widetilde{۱} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{a}_{ij}, i, j = ۱,۲,\dots,n, i \neq j$$

شدت مقیاس فازی	متغیر کلامی	عدد فازی
$\widetilde{۱}$	اهمیت برابر	(-، ۱، -)
$\widetilde{۳}$	اهمیت نسبی	(-، ۳، -)
$\widetilde{۵}$	اهمیت زیاد	(-، ۵، -)
$\widetilde{۷}$	اهمیت آشکار	(-، ۷، -)
$\widetilde{۹}$	اهمیت مطلق	(-، ۹، -)
$\widetilde{۲},\widetilde{۴},\widetilde{۶},\widetilde{۸}$	مقادیر میانی	(-، -، -)

سایر نکات

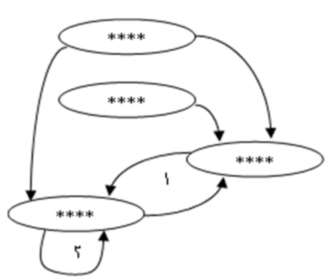
سایر مراحل و اقدامات بر اساس روش قطعی

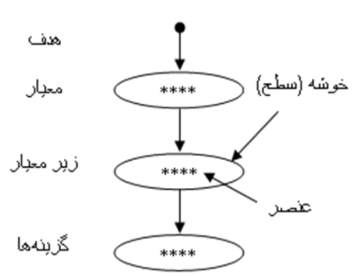
مقدمه

- در صورت وجود وابستگی میان عناصر یک سلسله مراتب، فرآیند تحلیل سلسله مراتبی به نتیجه مطلوب منجر نمی‌شود.
- این روش فرض سلسله مراتبی بودن ساختار که مستلزم مستقل بودن معیارها نسبت به یکدیگر است را کنار می‌گذارد.
- فرآیند تحلیل شبکه‌ای از لحاظ شیوه و منطق تجزیه و تحلیل همانند حالت سلسله مراتبی بر مقایسه‌های زوجی استوار است.

ساختار شبکه ای

- وجود روابط متقابل (بازخور)؛
- ساختار سلسله مراتبی در واقع ساختاری خطی و از بالا به پایین است؛
- شبکه‌ها در تمامی جهات گسترش یافته و شامل حلقه‌هایی میان خوشه‌ها و در درون خوشه‌ها می‌باشند.





Page • 52

فرایند

- ترسیم شبکه عناصر مسئله با توجه به روابط درونی و میانی آنها؛
- مقایسه‌های زوجی؛
- این مرحله در فرآیند تحلیل شبکه‌ای از طریق مقایسه معیارها و تشکیل سوپر ماتریس انجام می‌شود؛
- با توجه به ترجیحات و علایق ما، میزان اهمیت یک معیار خاص در مقایسه با معیار دیگر به چه میزان است؟
- مقیاس ۹ تایی.

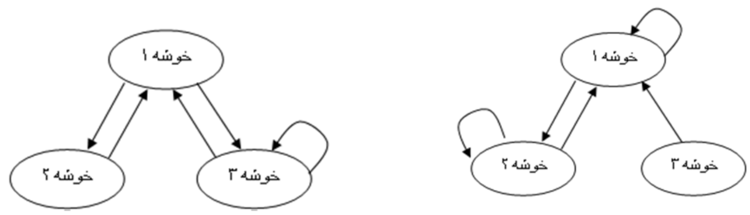
سوپر ماتریس

این سوپر ماتریس شامل m خوشه (سطح) است که $C_i, i=1,2,\ldots,m$ ، i امین خوشه آن را نشان می‌دهد. همچنین $e_{ij}, i=1,2,\ldots,m, j=1,2,\ldots,n_i$ ، نشان دهنده jامین عنصر خوشه i ام است. هر یک از بردارهای $W_{ij}, i,j=1,2,\ldots,m$ نیز بردارهای ویژه اصلی حاصل از تاثیر عناصر خوشه‌های i ام و jام می‌باشند که از مقایسه زوجی آنها به دست می‌آید. اگر عناصر خوشه‌های i و j تاثیری بر یکدیگر نداشته باشند، $W_{ij}=0$ خواهد بود.

$$W = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \cdots & C_m \\ e_{11} \cdots e_{1n_1} & e_{21} \cdots e_{2n_2} & \cdots & e_{m1} \cdots e_{mn_m} \end{array} \\ \begin{array}{c} C_1 \begin{array}{c} e_{11} \\ \vdots \\ e_{1n_1} \end{array} \\ C_2 \begin{array}{c} e_{21} \\ \vdots \\ e_{2n_2} \end{array} \\ \vdots \\ C_m \begin{array}{c} e_{m1} \\ \vdots \\ e_{mn_m} \end{array} \end{array} & \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1m} \\ \\ W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2m} \\ \\ \\ W_{m1} & W_{m2} & \cdots & W_{mm} \end{bmatrix} \end{array}$$

Page • 54

مثال



$$W=\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & 0 \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$W=\begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & 0 & 0 \\ W_{31} & 0 & W_{33} \end{bmatrix} \end{array}$$

فرایند – ادامه

- پس از تشکیل سوپر ماتریس، نوبت به استخراج سوپر ماتریس موزون با تبدیل مجموع تمامی ستونها به یک می‌رسد.
- این مرحله شباهت بسیاری با مفهوم زنجیر مارکوف دارد که در آن مجموع احتمالات تمامی حالات باید برابر یک می‌باشد.
- عناصر هر یک از ستونهای یک خوشه را بر مجموع عناصر آن ستون تقسیم نمائید.
- محاسبه بردار اوزان، با استفاده از توانهای حدی سوپر ماتریس؛

$$\lim_{k\to\infty} W^k$$

نکته فرایند

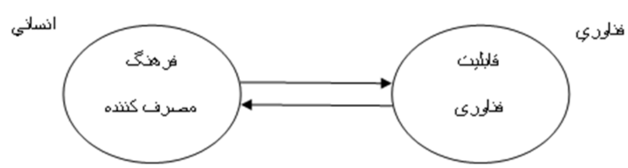
- گاهی اوقات به دلیل وجود اثر حلقه‌ای، اوزان حاصل از توانهای حدی سوپر ماتریس یکتا نبوده و دو یا چند سوپر ماتریس حدی وجود خواهد داشت.
- در این حالت برای به دست آوردن اوزان از مجموع چزارو استفاده می‌گردد.

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{N}\right)\sum_{r=1}^{N} W_r^{k}$$

مثال

- عامل کلیدی در توسعه موفق یک سیستم را انطباق عوامل انسانی و فناوری آن در نظر بگیرید.

عوامل انسانی	عوامل فناوری
فرهنگ کسب و کار	قابلیت کارکنان
تقاضای مصرف کننده نهایی	فناوری
مدیریت	منبع



مثال – ادامه

مدیریت	مصرف کننده	فرهنگ	قابلیت
۴	۳	۱	فرهنگ
۱	۱	۱/۳	مصرف کننده
۱	۱	۱/۴	مدیریت

مدیریت	مصرف کننده	فرهنگ	فناوری
۱/۲	۱	۱	فرهنگ
۱/۲	۱	۱	مصرف کننده
۱	۲	۲	مدیریت

مدیریت	مصرف کننده	فرهنگ	فناوری
۱/۲	۱	۱	فرهنگ
۱/۲	۱	۱	مصرف کننده
۱	۲	۲	مدیریت

منبع	فناوری	قابلیت	فرهنگ
۳	۵	۱	قابلیت
۱/۳	۱	۱/۵	فناوری
۱	۳	۱/۳	منبع

منبع	فناوری	قابلیت	مصرف کننده
۲	۵	۱	قابلیت
۱/۳	۱	۱/۵	فناوری
۱	۳	۱/۲	منبع

منبع	فناوری	قابلیت	مدیریت
۱/۳	۱/۵	۱	قابلیت
۳	۱	۵	فناوری
۱	۱/۳	۳	منبع

مثال – ادامه

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۰	۰	۰	۰.۶۳۴	۰.۲۵۰	۰.۴۰۰
۲	۰	۰	۰	۰.۱۹۲	۰.۲۵۰	۰.۲۰۰
۳	۰	۰	۰	۰.۱۷۴	۰.۲۵۰	۰.۴۰۰
۴	۰.۶۳۷	۰.۵۸۲	۰.۱۳۶	۰	۰	۰
۵	۰.۱۰۵	۰.۱۰۹	۰.۶۵۴	۰	۰	۰
۶	۰.۲۵۸	۰.۳۰۹	۰.۲۱۰	۰	۰	۰

زوج

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۰.۴۶۴	۰.۴۶۴	۰.۴۶۴	۰	۰	۰
۲	۰.۲۱۰	۰.۲۱۰	۰.۲۱۰	۰	۰	۰
۳	۰.۳۲۴	۰.۳۲۴	۰.۳۲۴	۰	۰	۰
۴	۰	۰	۰	۰.۴۶۳	۰.۴۶۳	۰.۴۶۳
۵	۰	۰	۰	۰.۲۸۴	۰.۲۸۴	۰.۲۸۴
۶	۰	۰	۰	۰.۲۵۳	۰.۲۵۳	۰.۲۵۳

فرد

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۰	۰	۰	۰.۴۶۴	۰.۴۶۴	۰.۴۶۴
۲	۰	۰	۰	۰.۲۱۰	۰.۲۱۰	۰.۲۱۰
۳	۰	۰	۰	۰.۳۲۴	۰.۳۲۴	۰.۳۲۴
۴	۰.۴۶۳	۰.۴۶۳	۰.۴۶۳	۰	۰	۰
۵	۰.۲۸۴	۰.۲۸۴	۰.۲۸۴	۰	۰	۰
۶	۰.۲۵۳	۰.۲۵۳	۰.۲۵۳	۰	۰	۰

Page • 60

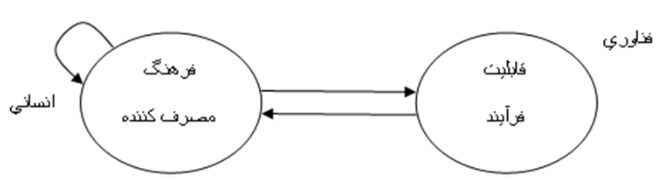
مثال – ادامه

- بر اساس ماتریس‌های توانی فوق، سوپر ماتریس دارای اثر حلقه‌ای است و در این حالت از جمع چزارو (یعنی افزودن دو ستون و تقسیم مجموع آنها بر دو) برای محاسبه اوزان نهایی به صورت زیر استفاده می‌گردد.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۰.۲۳۳	۰.۲۳۳	۰.۲۳۳	۰.۲۳۳	۰.۲۳۳	۰.۲۳۳
۲	۰.۱۰۵	۰.۱۰۵	۰.۱۰۵	۰.۱۰۵	۰.۱۰۵	۰.۱۰۵
۳	۰.۱۶۲	۰.۱۶۲	۰.۱۶۲	۰.۱۶۲	۰.۱۶۲	۰.۱۶۲
۴	۰.۲۳۱	۰.۲۳۱	۰.۲۳۱	۰.۲۳۱	۰.۲۳۱	۰.۲۳۱
۵	۰.۱۴۲	۰.۱۴۲	۰.۱۴۲	۰.۱۴۲	۰.۱۴۲	۰.۱۴۲
۶	۰.۱۲۷	۰.۱۲۷	۰.۱۲۷	۰.۱۲۷	۰.۱۲۷	۰.۱۲۷

نکته بازخورد درونی

- روش ۱: در عناصر قطر اصلی خوشه دارای بازخور درونی اعداد یک قرار دهیم.
- روش ۲: انجام مقایسه‌های زوجی بر روی عناصر خوشه نسبت به هر یک از عناصر.



Page • 62

فرآیند تحلیل شبکه‌ای خاکستری

فرایند تحلیل شبکه فازی

- روش تحلیل توسعه‌ای چانگ؛

۱) ایجاد ساختار شبکه‌ای و تعیین روابط میان معیارها و گزینه‌ها؛

۲) ایجاد ماتریس‌های مقایسات زوجی فازی با توجه به ساختار شبکه‌ای؛

۳) تشکیل ماتریس‌های تلفیقی از طریق میانگین گیری هندسی (در تصمیم‌گیری گروهی)؛

۴) محاسبه اوزان اولیه با روش تحلیل توسعه‌ای چانگ؛

۵) تشکیل سوپر ماتریس با توجه به ساختار شبکه‌ای و محاسبه توانهای حدی آن.

تحلیل توسعه ای چانگ

- محاسبه اوزان ماتریسهای مقایسات زوجی در حالتی که قضاوتها بر حسب اعداد فازی مثلثی بیان شده اند.

ماتریس مقایسه زوجی فازی

$$P = \left\lfloor \tilde{a}_{ij} \right\rfloor_{n\times n}$$

شاخص اندازه فازی برای هر سطر

$$\tilde{S}_k = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{kj} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \right)^{-1}$$

تحلیل توسعه ای چانگ – ادامه

- در مرحله بعدی، هر یک از مقادیر به دست آمده برای شاخص اندازه فازی به صورت دو به دو با یکدیگر مقایسه میشود.

$$\tilde{S}_1 = (l_1, m_1, u_1)$$
$$\tilde{S}_2 = (l_2, m_2, u_2)$$

$$V(\tilde{S}_1 \geq \tilde{S}_2) = 1 \Leftrightarrow m_1 \geq m_2$$
$$V(\tilde{S}_1 \geq \tilde{S}_2) = hgt(\tilde{S}_1 \cap \tilde{S}_2) = d \Leftrightarrow m_1 \prec m_2$$

ارتفاع بالاترین فصل مشترک

$$d = \frac{(l_2 - u_1)}{[(l_2 - m_2) - (u_1 - m_1)]}$$

تحلیل توسعه ای چانگ – ادامه

درجه امکان

$$d'(A_i) = min\{V(\tilde{S}_i \geq \tilde{S}_k)\}, k = ۱,۲,\ldots,n, k \neq i$$

$$W = (w_۱, w_۲, \ldots, w_n)$$

بی مقیاس سازی

مثال

	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
(۱)	(۱،۱،۱)	(۱/۰۷۸، ۱/۴۲۶، ۱/۸۴۹)	(۱/۱۴۱، ۱/۴۲۶، ۱/۷۴۵)	(۱/۴۸۳، ۱/۹۵۲، ۲/۴۹۶)
(۲)	(۰/۵۰۳، ۰/۶۳۵، ۰/۸۲۷)	(۱،۱،۱)	(۱/۳۲۲، ۱/۷۶۸، ۲/۳۲)	(۱/۷۰۳، ۲/۲۰۸، ۲/۷۴۹)
(۳)	(۰/۵۷۳، ۰/۷۰۱، ۰/۸۷۶)	(۰/۴۳۱، ۰/۵۶۶، ۰/۷۵۷)	(۱،۱،۱)	(۱/۵۵۶، ۲/۰۳۴، ۲/۵۸۷)
(۴)	(۰/۴۰۱، ۰/۵۱۲، ۰/۶۷۴)	(۰/۳۶۴، ۰/۴۵۳، ۰/۵۸۷)	(۰/۳۸۷، ۰/۴۹۲، ۰/۶۴۳)	(۱،۱،۱)

$$S_۱ = (۰/۲۱۳, ۰/۳۱۹, ۰/۴۷۴)$$
$$S_۲ = (۰/۲۰۵, ۰/۳۰۹, ۰/۴۶۲)$$
$$S_۳ = (۰/۱۶۱, ۰/۲۳۷, ۰/۳۴۹)$$
$$S_۴ = (۰/۰۹۷, ۰/۱۳۵, ۰/۱۹۴)$$

$$\begin{Bmatrix} V(S_۱ \geq S_۲) = ۱ \\ V(S_۱ \geq S_۳) = ۱ \\ V(S_۱ \geq S_۴) = ۱ \end{Bmatrix} \mapsto \begin{Bmatrix} V(S_۲ \geq S_۱) = ۰/۹۵۹ \\ V(S_۲ \geq S_۳) = ۱ \\ V(S_۲ \geq S_۴) = ۱ \end{Bmatrix} \mapsto \begin{Bmatrix} V(S_۳ \geq S_۱) = ۰/۶۲۳ \\ V(S_۳ \geq S_۲) = ۰/۶۶۷ \\ V(S_۳ \geq S_۴) = ۱ \end{Bmatrix} \mapsto \begin{Bmatrix} V(S_۴ \geq S_۱) = -۰/۱۱۱ \\ V(S_۴ \geq S_۲) = -۰/۰۶۴ \\ V(S_۴ \geq S_۳) = ۰/۲۴۷ \end{Bmatrix}$$

مثال – ادامه

	(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
(۱)	(۱،۱،۱)	(۱/۰۷۸ ،۱/۴۲۶ ،۱/۸۴۹)	(۱/۱۴۱ ،۱/۴۲۶ ،۱/۷۴۵)	(۱/۴۸۳ ،۱/۹۵۲ ،۲/۴۹۶)
(۲)	(۰/۵۰۳ ،۰/۶۳۵ ،۰/۸۲۷)	(۱،۱،۱)	(۱/۳۲۲ ،۱/۷۶۸ ،۲/۳۲)	(۱/۷۰۳ ،۲/۲۰۸ ،۲/۷۴۹)
(۳)	(۰/۵۷۳ ،۰/۷۰۱ ،۰/۸۷۶)	(۰/۴۳۱ ،۰/۵۶۶ ،۰/۷۵۷)	(۱،۱،۱)	(۱/۵۵۶ ،۲/۰۳۴ ،۲/۵۸۷)
(۴)	(۰/۴۰۱ ،۰/۵۱۲ ،۰/۶۷۴)	(۰/۳۶۴ ،۰/۴۵۳ ،۰/۵۸۷)	(۰/۳۸۷ ،۰/۴۹۲ ،۰/۶۴۳)	(۱،۱،۱)

$$\begin{Bmatrix} V(S_۱ \geq S_۲) = ۱ \\ V(S_۱ \geq S_۳) = ۱ \\ V(S_۱ \geq S_۴) = ۱ \end{Bmatrix} \mapsto \begin{Bmatrix} V(S_۲ \geq S_۱) = ۰/۹۵۹ \\ V(S_۲ \geq S_۳) = ۱ \\ V(S_۲ \geq S_۴) = ۱ \end{Bmatrix} \mapsto \begin{Bmatrix} V(S_۳ \geq S_۱) = ۰/۶۲۳ \\ V(S_۳ \geq S_۲) = ۰/۶۶۷ \\ V(S_۳ \geq S_۴) = ۱ \end{Bmatrix} \mapsto \begin{Bmatrix} V(S_۴ \geq S_۱) = -۰/۱۱۱ \\ V(S_۴ \geq S_۲) = -۰/۰۶۴ \\ V(S_۴ \geq S_۳) = ۰/۲۴۷ \end{Bmatrix}$$

$$d'(A_۱) = \min(۱,۱,۱) = ۱$$

$$d'(A_۲) = \min(۰/۹۵۹,۱,۱) = ۰/۹۵۹$$

$$d'(A_۳) = \min(۰/۶۲۳,۰/۶۶\ ۷,۱) = ۰/۶۲۳$$

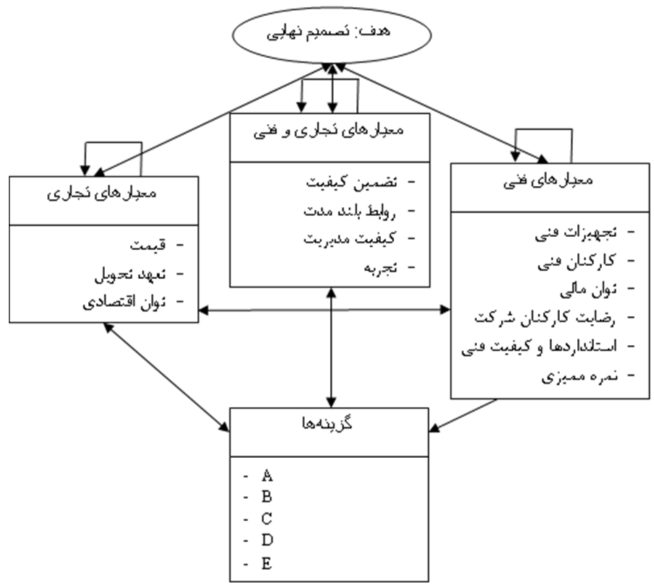
$$d'(A_۴) = \min(-,-,۰/۲۴۷) = ۰/۲۴۷$$

بی مقیاس سازی

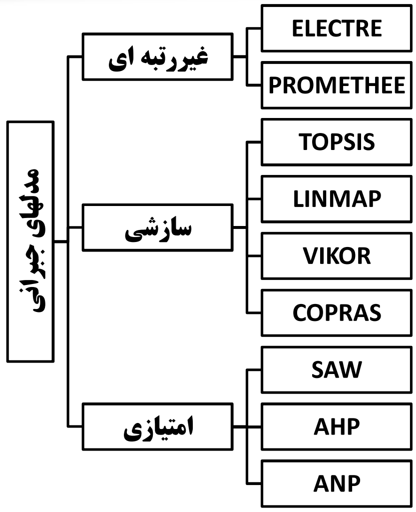
مثال کاربردی

معیار	زیر معیار	تعریف
معیارهای تجاری	قیمت (P)	قیمت پیشنهادی تامین کننده در مناقصه
	تعهد تحویل (DI)	نحوه برآوردن تعهدات در قراردادهای پیشین
	توان اقتصادی (EP)	اطمینان از توانایی تحویل سفارشات در زمان مقرر به صورت اقتصادی
معیارهای تجاری و فنی	تضمین کیفیت (QI)	نحوه پاسخگویی تامین کننده به خدمات تضمین کیفیتی خود
	روابط بلند مدت (LR)	سابقه همکاری پیشین تامین کننده با شرکت
	کیفیت مدیریت (MQ)	توانایی مدیریت تامین کننده در ارتباط با مدیریت شرکت در قراردادهای پیشین
	تجربه (E)	سابقه فعالیت تامین کننده در زمینه مربوطه
معیارهای فنی	تجهیزات فنی (TE)	میزان به روز بودن فناوری تامین کننده
	کارکنان فنی (TP)	تجربه و دانش فنی تامین کننده
	توان مالی (FP)	توان مالی تامین کننده برای تهیه فناوری و دانش مورد نیاز
	رضایت کارکنان شرکت (SP)	رضایت کارکنان فنی شرکت از قراردادهای قبلی تامین کننده
	استانداردها و کیفیت فنی (TSQ)	کیفیت محصول/ محصولات شرکت
	نمره ممیزی (AD)	نمره تامین کننده در ممیزی سالانه شرکت

مثال کاربردی – ادامه



مدلهای جبرانی



Page • 73

مقدمه

- ایده‌آل گرایی و بهینه کاوی یک ویژگی ذاتی در تمامی نظامهای طبیعی و غیر طبیعی است.
- گزینه ای را تصمیم یا گزینه بهینه می‌نامیم اگر در تمامی معیارهای (شاخصه ای) مورد نظر عملکردی بهتر از سایر گزینه‌ها داشته باشد.
- پیروی از مفهوم برنامه‌ریزی سازشی (زِلنی).
- برنامه‌ریزی سازشی جواب ایده‌آل یک مسئله بهینه‌سازی را به گونه‌ای تعیین می‌کند که کوتاهترین فاصله را با یک گزینه ایده‌آل مطلوب (مثبت) داشته باشد.

مقدمه – ادامه

- آیا تعریف اولیه صحیح است؟ تنها کوتاه ترین فاصله با ایده آل مثبت!!
- ایده فاصله یک گزینه از گزینه ایده‌آل یا ضد ایده‌آل را محققین بعدی در حل مسائل تصمیم‌گیری چند شاخصه مورد استفاده قرار دادند.

Milan Zeleny
January 22, 1942 (age 73)
Czech-American
Fordham University of New York

طبقه بندی روش ها

- سازشی
  - TOPSIS
    - قطعی
    - غیرقطعی
  - LINMAP
    - قطعی
    - غیرقطعی
  - VIKOR
    - قطعی
    - غیرقطعی
  - COPRAS
    - قطعی
    - غیرقطعی

روش تاپسیس

- روش اولویت‌بندی گزینه‌ها بر اساس شباهت به گزینه ایده‌آل؛
- هوانگ و یون؛
- گزینه مطلوب گزینه‌ای است که همزمان کمترین فاصله را از ایده‌آل مثبت و بیشترین فاصله را از ایده‌آل منفی داشته باشد؛
- در خصوص ارزیابی m گزینه بر حسب n شاخص.

$D = \lfloor r_{ij} \rfloor$

$m \times n$

r_{ij}

$w_j \geq ۰, j = ۱,۲,\ldots,n$

$\sum_{j=۱}^{n} w_j = ۱$

گام ها و مراحل

$$n_{ij} = \frac{r_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=۱}^{m} r_{ij}^{۲}}}$$

$$N = \lfloor n_{ij} \rfloor$$

$$V = N \cdot W$$

$$A^{+} = \left\{ v_{ij} \left| \left(\max_i v_{ij}, j \in J \right), \left(\min_i v_{ij}, j \in J' \right) \right. \right\}$$
$$A^{-} = \left\{ v_{ij} \left| \left(\min_i v_{ij}, j \in J \right), \left(\max_i v_{ij}, j \in J' \right) \right. \right\}$$

گام ها و مراحل – ادامه

$$A^{+} = \left\{ v_{ij} \middle| \left(\max_i v_{ij}, j \in J\right), \left(\min_i v_{ij}, j \in J'\right) \right\}$$
$$A^{-} = \left\{ v_{ij} \middle| \left(\min_i v_{ij}, j \in J\right), \left(\max_i v_{ij}, j \in J'\right) \right\}$$

$$d_i^{+} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(v_{ij} - v_j^{+}\right)^2}$$
$$d_i^{-} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left(v_{ij} - v_j^{-}\right)^2}$$

$$CI_i = \frac{d_i^{-}}{d_i^{-} + d_i^{+}}$$

مثال

شاخص / شرکت	درآمد	هزینه	صادرات
A	٪۷	٪۳	٪۶۰
B	٪۳۲	٪۲۸	٪۷
C	٪۳۴	٪۴	۰

تاپسیس خاکستری

GTOPSIS

- گام اول: در گام نخست مجموعه‌ای از مهمترین ویژگی‌ها یا معیارهایی که گزینه‌ها را شرح می‌دهند، شناسایی و تعریف می‌شوند.
- گام دوم: تشکیل ماتریس تصمیم‌گیری. $\otimes r_{ij} = \left[\underline{r}_{ij}, \bar{r}_{ij}\right]$
- گام سوم: بی مقیاس‌سازی ماتریس تصمیم خاکستری.

بی مقیاس سازی تاپسیس خاکستری

جهانشاهلو و همکاران

$$\otimes n_{ij} = \left[\underline{n}_{ij}, \bar{n}_{ij}\right] = \left[\frac{\underline{r}_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\underline{r}_{ij}\right)^{2} + \left(\bar{r}_{ij}\right)^{2}\right]}}, \frac{\bar{r}_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left[\left(\underline{r}_{ij}\right)^{2} + \left(\bar{r}_{ij}\right)^{2}\right]}}\right]$$

زاوادسکاس

سود

$$\otimes n_{ij} = \left[\underline{n}_{ij}, \bar{n}_{ij}\right] = \left[\frac{\underline{r}_{ij}}{\max_i\left(\bar{r}_{ij}\right)}, \frac{\bar{r}_{ij}}{\max_i\left(\bar{r}_{ij}\right)}\right]$$

هزینه

$$\otimes n_{ij} = \left[\underline{n}_{ij}, \bar{n}_{ij}\right] = \left[1 - \frac{\bar{r}_{ij}}{\max_i\left(\bar{r}_{ij}\right)}, 1 - \frac{\underline{r}_{ij}}{\max_i\left(\bar{r}_{ij}\right)}\right]$$

تاپسیس خاکستری – ادامه

- گام چهارم: تعیین بردار اوزان معیارها. در این گام نسبت به تعیین بردار وزن شاخصهای تصمیم‌گیری اقدام می‌شود (آنتروپی خاکستری، مقایسه‌های زوجی خاکستری و یا روش LINMAP با داده‌های خاکستری)؛ $\otimes W = (\otimes w_1, \otimes w_2, \ldots, \otimes w_n)$
- گام پنجم: تشکیل ماتریس تصمیم خاکستری بی‌مقیاس وزین. پس از بی مقیاس‌سازی ماتریس تصمیم خاکستری و تعیین بردار اوزان معیارها در گامهای سوم و چهارم، در این گام نسبت به تشکیل ماتریس بی مقیاس وزین اقدام می‌شود.

$$\otimes V = \otimes N \cdot \otimes W$$

تاپسیس خاکستری – ادامه

- گام ششم. تعریف بردارهای ایده‌آل مثبت و منفی. نظیر روش تاپسیس با داده‌های قطعی، در حالت خاکستری نیز به تعریف دو بردار ایده‌آل مثبت و منفی نیاز داریم.

$$A^{+} = \{v_1^{+}, v_2^{+}, \ldots, v_n^{+}\} = \left\{\left(\max_i \bar{v}_{ij}, j \in J\right), \left(\min_i \underline{v}_{ij}, j \in J'\right)\right\}$$
$$A^{-} = \{v_1^{-}, v_2^{-}, \ldots, v_n^{-}\} = \left\{\left(\min_i \underline{v}_{ij}, j \in J\right), \left(\max_i \bar{v}_{ij}, j \in J'\right)\right\}$$

- گام هفتم. محاسبه فاصله هر گزینه از بردارهای ایده‌آل مثبت و منفی. با تعریف بردارهای ایده‌آل در گام ششم.

$$d_i^{+} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[\left|v_j^{+} - \underline{v}_{ij}\right|^2 + \left|v_j^{+} - \bar{v}_{ij}\right|^2\right]}$$
$$d_i^{-} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\left[\left|v_j^{-} - \underline{v}_{ij}\right|^2 + \left|v_j^{-} - \bar{v}_{ij}\right|^2\right]}$$

تاپسیس خاکستری – ادامه

- گام هشتم. محاسبه شاخص نزدیکی نسبی.
- چه مقدار آن بیشتر باشد، به معنای بهتر بودن گزینه مربوطه است.

$$C_i^+ = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}$$

مثال

شعبه	$C_۱$		$C_۲$	
	$\overline{x}_{i۱}$	$\underline{x}_{i۱}$	$\overline{x}_{i۲}$	$\underline{x}_{i۲}$
$A_۱$	۹۸	۵۰	۳۱	۲۶
$A_۲$	۹۹	۶۷	۹۹	۹۵
$A_۳$	۹۷	۹۴	۱۳	۱۰

تاپسیس فازی

FTOPSIS

- بی مقیاس سازی ماتریس تصمیم؛

$$\tilde{n}_{ij} = \frac{\tilde{r}_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=۱}^{m} \tilde{n}_{ij}^{۲}}}, i = ۱,۲,\ldots,m;\ j = ۱,۲,\ldots,n$$

- ماتریس بی مقیاس وزین؛

$$\tilde{v}_{ij} = \tilde{w}_j \cdot \tilde{n}_{ij}, i = ۱,۲,\ldots,m;\ j = ۱,۲,\ldots,n$$

- راه حل ایده‌آل مثبت و منفی؛

$$\tilde{A}^{+} = \left\{\tilde{v}_{۱}^{+}, \tilde{v}_{۲}^{+}, \ldots, \tilde{v}_{j}^{+}, \ldots, \tilde{v}_{n}^{+}\right\} = \left\{\left(\max_{i} \tilde{v}_{ij} \middle| j \in J\right), \left(\min_{i} \tilde{v}_{ij} \middle| j \in J'\right)\right\}$$

$$\tilde{A}^{-} = \left\{\tilde{v}_{۱}^{-}, \tilde{v}_{۲}^{-}, \ldots, \tilde{v}_{j}^{-}, \ldots, \tilde{v}_{n}^{-}\right\} = \left\{\left(\min_{i} \tilde{v}_{ij} \middle| j \in J\right), \left(\max_{i} \tilde{v}_{ij} \middle| j \in J'\right)\right\}$$

تاپسیس فازی

FTOPSIS

- فاصله گزینه‌ها از ایده‌آل مثبت و منفی؛

$$\tilde{S}_{i}^{+} = \sqrt{\sum_{k=۱}^{m} \left[\tilde{v}_{ij} - \tilde{v}_{j}^{+}\right]^{۲}},\ i = ۱,۲,\ldots,m$$

$$\tilde{S}_{i}^{-} = \sqrt{\sum_{k=۱}^{m} \left[\tilde{v}_{ij} - \tilde{v}_{j}^{-}\right]^{۲}},\ i = ۱,۲,\ldots,m$$

$$\max\left\{\tilde{v}_{ij}\right\} - \tilde{v}_{j}^{+} = \min\left\{\tilde{v}_{ij}\right\} - \tilde{v}_{j}^{-} = ۰$$

- فازی زدایی؛
- محاسبه مقادیر شاخص نزدیکی نسبی؛

$$C_{i}^{+} = \frac{S_{i}^{-}}{S_{i}^{+} + S_{i}^{-}},\quad i = ۱,۲,\ldots,m$$

معادل سازی فازی مثلثی – گزینه به معیار

متغیر کلامی	عدد فازی مثلثی معادل	عدد فازی ذوزنقه‌ای معادل
خیلی ضعیف/ خیلی کم	(۰، ۱، ۲)	(۰، ۰، ۱، ۲)
ضعیف/ کم	(۱، ۲، ۳)	(۱، ۲، ۲، ۳)
نسبتاً ضعیف/ نسبتاً کم	(۲، ۳.۵، ۵)	(۲، ۳، ۴، ۵)
متوسط	(۴، ۵، ۶)	(۴، ۵، ۵، ۶)
نسبتاً قوی/ نسبتاً خوب	(۵، ۶.۵، ۸)	(۵، ۶، ۷، ۸)
قوی/ خوب	(۷، ۸، ۹)	(۷، ۸، ۸، ۹)
خیلی قوی/ خیلی خوب	(۸، ۹، ۱۰)	(۸، ۹، ۱۰، ۱۰)

معادل سازی فازی مثلثی – اهمیت معیارها

متغیر کلامی	عدد فازی مثلثی معادل	عدد فازی ذوزنقه‌ای معادل
خیلی پایین	(۰، ۰.۱، ۰.۲)	(۰، ۰، ۰.۱، ۰.۲)
پایین	(۰.۱، ۰.۲، ۰.۳)	(۰.۱، ۰.۲، ۰.۲، ۰.۳)
نسبتاً پایین	(۰.۲، ۰.۳۵، ۰.۵)	(۰.۲، ۰.۳، ۰.۴، ۰.۵)
متوسط	(۰.۴، ۰.۵، ۰.۶)	(۰.۴، ۰.۵، ۰.۵، ۰.۶)
نسبتاً بالا	(۰.۵، ۰.۶۵، ۰.۸)	(۰.۵، ۰.۶، ۰.۷، ۰.۸)
بالا	(۰.۷، ۰.۸، ۰.۹)	(۰.۷، ۰.۸، ۰.۸، ۰.۹)
خیلی بالا	(۰.۸، ۰.۹، ۱)	(۰.۸، ۰.۹، ۱، ۱)

فاصله اعداد فازی خاص

$$\tilde{a}_۱ = \left(a_۱, m_۱^۱, m_۱^۲, b_۱\right)$$
$$\tilde{a}_۲ = \left(a_۲, m_۲^۱, m_۲^۲, b_۲\right)$$
$$d_v(\tilde{a}_۱, \tilde{a}_۲) = \sqrt{\frac{۱}{۴}\left[\left(a_۱ - a_۲\right)^۲ + \left(m_۱^۱ - m_۲^۱\right)^۲ + \left(m_۱^۲ - m_۲^۲\right)^۲ + \left(b_۱ - b_۲\right)^۲\right]}$$

$$\tilde{a}_۲ = \left(a_۲, m_۲, b_۲\right)$$
$$\tilde{a}_۱ = \left(a_۱, m_۱, b_۱\right)$$
$$d_v(\tilde{a}_۱, \tilde{a}_۲) = \sqrt{\frac{۱}{۳}\left[\left(a_۱ - a_۲\right)^۲ + \left(m_۱ - m_۲\right)^۲ + \left(b_۱ - b_۲\right)^۲\right]}$$

فاصله اعداد فازی خاص – ادامه

$$d_i^+ = \sum_{j=۱}^{n} d_v\left(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^+\right), i = ۱,۲, \dots, m$$
$$d_i^- = \sum_{j=۱}^{n} d_v\left(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-\right), i = ۱,۲, \dots, m$$
$$CI_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}, i = ۱,۲, \dots, m$$

مثال

$w_{۱} = (۰.۷, ۰.۸, ۰.۸, ۰.۹)$
$w_{۲} = (۰.۸, ۰.۹, ۱, ۱)$

	$C_{۱}$	$C_{۲}$
$A_{۱}$	(۵، ۶، ۷، ۸)	(۵، ۷، ۸، ۱۰)
$A_{۲}$	(۷، ۸، ۸، ۹)	(۸، ۹، ۱۰، ۱۰)
$A_{۳}$	(۷، ۸.۷، ۹.۳، ۱۰)	(۷، ۸.۳، ۸.۷، ۱۰)

روش لینمَپ

- برنامه‌ریزی خطی برای تجزیه و تحلیل چند بعدی ترجیحات؛
- توسط اسرینیواسان و شاکر؛
- با در نظر گرفتن مجموعه‌ای اولیه از ترجیحات تصمیم گیرنده در خصوص اولویت زوجی گزینه‌ها نسبت به یکدیگر، یک بردار تصمیم ایده‌آل و اوزان شاخصهای تصمیم‌گیری را به گونه‌ای مشخص می‌سازد که رتبه‌بندی حاصل از فاصله گزینه‌ها با بردار ایده‌آل به دست آمده بر اساس اوزان محاسبه شده بیشترین سازگاری را با ترجیحات اولیه تصمیم گیرنده داشته باشد.

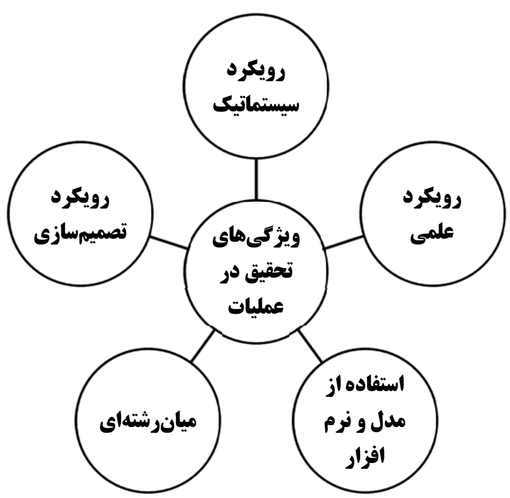
Linear Programming for Multidimensional Analysis of Preferences

مبنای روش لینمپ

برنامه ریزی خطی

- انواع برنامه/ مدل
- اجزاء مدل
- مدلسازی پیوسته و صفر یا یک و ترکیبی
- حل مدل های خطی (هندسی، سیمپلکس، M، دو فاز، ثانویه، تجدید نظر شده، انشعاب و تحدید هندسی، تغییر متغیر، بالاس)
- تحلیل حساسیت و برنامه ریزی پارامتری

ویژگی ها



انواع مدل ها

- مدل
  - نمادین
    - ریاضی
      - قطعی
      - احتمالی
      - ترکیبی
    - کلامی
  - فیزیکی
    - قیاسی
    - شمایلی

Page • 97

اجزاء مدل ریاضی

- محدودیت
- تابع هدف
- متغیرها
- وضعیت متغیر تصمیم
- ضرایب متغیر تصمیم در تابع هدف
- منابع در دسترس
- ضرایب فنی

Page • 98

جزء اول. متغیرها

به دو دسته قابل تقسیم هستند و با $x_j, y_i, x_{ij}, y_{ijk}, \ldots$ نمایش داده می‌شوند. اندیسهای متغیر نشاندهنده ابعاد درگیر در مساله هستند. در صوتیکه مساله تک بعدی باشد و به عنوان مثال هدف تولید محصول باشد، تنها یک اندیس بکار میرود (x_jمقدار تولید، استخدام یا خرید در ماه jام). در صورتیکه مساله دو بعدی باشد و به عنوان مثال ارسال کالا از مبدا به مقصد مدنظر باشد، اندیس دو بعدی خواهد بود (x_{ij}مقدار کالای ارسالی از مبدا iام به مقصد jام، نیروی iام استخدام شده برای دوره jام). همچنین اگر مساله سه بعدی باشد، x_{ij}میتواند نشان - دهنده میزان تولید محصول iام در ماه jام و در کارگاه kام باشد.

متغیر وابسته

- برون زا
- نتیجه
- پاسخ
- غیر قابل کنترل

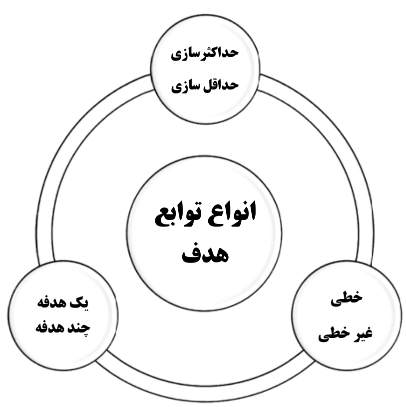
متغیر مستقل

- درون زا
- تصمیم
- قابل کنترل

Page • 99

جزء دوم. تابع هدف

- **یک رابطه ریاضی خطی که هدف موسسه (سازمان) را در قالب متغیرهای تصمیم توصیف می‌کند و با Z نمایش داده می شود.**



Page • 100

جزء سوم. محدودیت ها

یک معادله یا نامعادله، متشکل از متغیرهای تصمیم است که موانع موجود در دستیابی به هدف را مطرح می‌سازد. محدودیت‌ها بسته به نوع تعریف می‌توانند ≥ = ≤ باشند. قبل از نمایش محدودیتها از نماد (s.t' به معنی "محدود به") در مدل‌سازی استفاده می‌شود.

محدودیت بزرگ تر مساوی

محدودیت کوچک تر مساوی

محدودیت تساوی

محدودیت خطی $2x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$

محدودیت غیر خطی $x_1x_3 - 4x_2^2 \leq 15$

جزء چهارم. وضعیت متغیرهای تصمیم

۱. اگر متغیر تصمیم از نوع پیوسته و نامنفی باشد، از نماد استفاده می‌شود.

۲. اگر متغیر تصمیم از نوع آزاد در علامت باشد، از نماد Free استفاده می‌شود.

۳. اگر متغیر تصمیم از نوع صفر یا یک باشد، از نماد 0 or 1 استفاده می‌شود.

۴. اگر متغیر تصمیم از نوع عدد کاملاً صحیح باشد (عضو مجموعه اعداد صحیح) از نماد Int استفاده می‌شود.

متغیرهای مدلسازی | **متغیر عدد صحیح** | **متغیر صفر یا یک** | **متغیر آزاد در علامت** | **متغیر پیوسته**

جزء پنجم. ضرایب متغیرهای تصمیم در تابع هدف

این نماد به مفهوم تخصیص مقدار C به ازاء ایجاد هر واحد از متغیر ژام است. به عنوان مثال با تولید هر واحد از محصول x_j به اندازه C_j واحد هزینه یا سود نصیب سازمان خواهد شد.

جزء ششم) منابع در دسترس. با b_i نمایش داده می‌شود و به مفهوم مقدار موجود از منبع i است.

جزء هفتم) ضرایب متغیرهای تصمیم در محدودیت‌ها. با نماد a_{ij} نمایش داده می‌شود و به این پارامترها ضرایب فنی نیز گفته میشود که در واقع میزان مصرف یک خروجی (یا متغیر تصمیم)، از منابع را نمایش میدهد.

چارچوب کلی مدل

$$Max\ (Min)\quad Z=\sum_{j=1}^{n} C_j . X_j$$

$$s.t:$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le or = or \ge b_i \quad , \forall_{i\in m}$$

$$x_j \ge 0 \quad or \quad free$$

$$\begin{aligned}
&Max\ (Min)\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots c_nx_n\\
&S.t:\\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_{1n} \le b_1\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2\\
&.\\
&.\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m\\
&x_j \ge 0\\
&x_j \le 0\\
&x_j \quad free
\end{aligned}$$

- **فرض تناسب. هر فعالیت به تنهایی و مستقل از سایر فعالیت‌های دیگر عمل می‌نماید. مقدار تابع هدف و میزان مصرف منابع دقیقاً متناسب با یک متغیر، تغییر می‌کند.**
- **فرض جمع‌پذیری. تابع هدف از مجموع متغیرها بدست می‌آید. به عبارتی روابط غیر از رابطه ریاضی جمع (یا تفریق) نباید در تابع هدف یا محدودیت‌ها و بین متغیرهای تصمیم استفاده شود. این فرض در مدل‌های برنامه‌ریزی غیرخطی صادق نخواهد بود.**
- **فرض بخش‌پذیری. متغیرهای تصمیم می‌توانند مقادیر غیرصحیح باشند. به‌عبارتی لزومی به عددصحیح بودن نتایج مدل ریاضی نیست. این فرض در مدل‌های عددصحیح و صفر یا یک صادق نخواهد بود.**
- **فرض معین بودن. تمامی پارامترهای مدل مقادیری ثابت و غیراحتمالی‌اند. این فرض در مدل‌های احتمالی مانند برنامه‌ریزی پویای احتمالی صادق نخواهد بود.**

مساله ترکیب تولید

- کارخانه‌ای چهار محصول a, b, c, d را که به ترتیب سودشان ۲۵ و ۲۰ و ۱۰ و ۱۵ دلار است تولید می‌نماید. اگر برای تولید این چهار محصول به نیروی انسانی، ماده اولیه، ماشین آلات نیاز داشته باشیم مدل برنامه‌ریزی تولید این کارخانه را به نحوی تهیه کنید که سود کارخانه حداکثر شود و مقادیر استفاده از منابع از محدوده جدول زیر تجاوز نکند. اعداد داخل جدول نشاندهنده میزان منبع مورد نیاز برای تولید هر واحد از محصولات است.

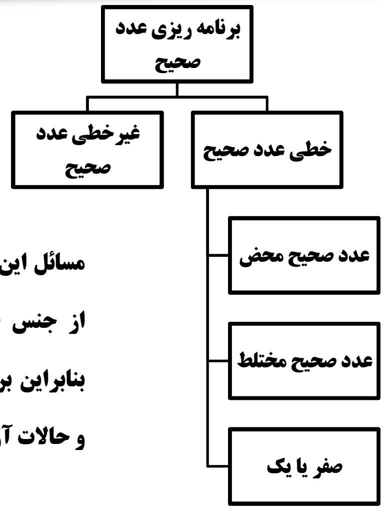
	محصول / منبع	A	B	C	D	در دسترس
نفر/ساعت	نیروی انسانی	۵	۷	۱۵	۹	۱۰۰۰
کیلوگرم	ماده اولیه	۱۰	۷	۵	۷	۵۰۰۰
تعداد/ساعت	ماشین آلات	۳	۱۰	۲	۱	۳۷۵
	تقاضا	۲۰۰	۱۰۰	۱۵۰	۲۷۰	
	سود	۱۵	۱۰	۲۰	۲۵	

مساله حمل و نقل

- یک شرکت توزیع‌کننده باید تمامی محصولات خود را از ۳ مرکز توزیع به ۳ فروشگاه ارسال کند. ظرفیت ۳ مرکز توزیع به ترتیب ۲۵۰، ۱۵۰، ۲۵۰ و تقاضای ۳ فروشگاه به ترتیب ۳۰۰، ۲۰۰، ۱۵۰ است. اگر هزینه ارسال هر واحد کالا از مراکز توزیع به فروشگاه-ها مطابق جدول زیر باشد، مسئله را به نحوی مدلسازی نمایید که هزینه توزیع‌کننده حداقل گردد.

توزیع \ فروشگاه	۱	۲	۳	
۱	۷	۱۱	۱۲	۲۵۰
۲	۱۱	۱۵	۸	۱۵۰
۳	۹	۱۴	۱۶	۲۵۰
	۳۰۰	۲۰۰	۱۵۰	

مدلسازی اعداد صحیح



مسائل این حالت بیشتر برای متغیرهای از جنس صفر و یک به کار می‌رود. بنابراین برای منظور باید محدودیت‌ها و حالات آن بررسی شود

حالت های خاص

رابطه	قاعده	کد
$y_1+y_2<=1$	محدودیت‌های دو به دو ناسازگار	۱
$y_1+y_2=1$	محدودیت این یا آن	۲
$y_1+y_2\geq 1$	محدودیت الزام	۳
$y_1+y_2=2$	محدودیت الزام دوگانه	۴
$y_1-y_2\leq 0$	محدودیت وابستگی ناقص	۵
$y_1-y_2=0$	محدودیت وابستگی	۶
$y_1+y_2+....+y_k=k$	انتخاب k متغیر از میان n متغیر تصمیم	۷

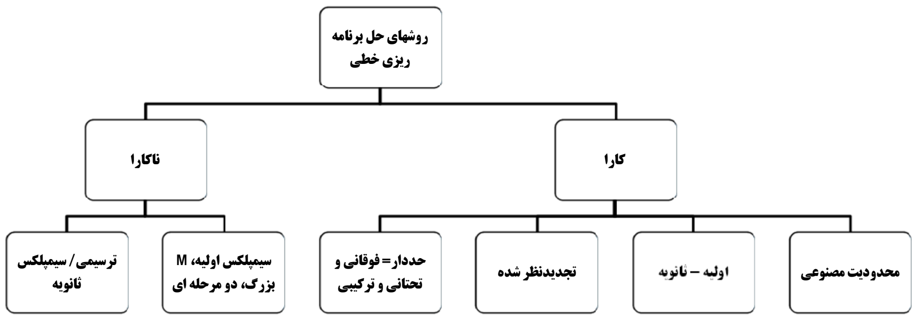
حالت های خاص – ادامه

کد	قاعده	رابطه
۸	انتخاب یک محدودیت از میان دو محدودیت (روش اول)	$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 + M(y)$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 + M(y)$ $x_j \geq 0$ $y = 0,1$
۹	انتخاب یک محدودیت از میان دو محدودیت (روش دوم)	$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 + My_1$ $a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 + My_2$
–	انتخاب k محدودیت از میان N محدودیت	$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 + My_1$ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 .... + a_{2n}x_n \leq b_2 + My_2$ . . $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 .... + a_{mn}x_n \leq b_m + My_m$
۱۰	انتخاب حداکثر k محدودیت از M محدودیت	$y_1 + y_2 + ... + y_M \leq M - k$
۱۱	انتخاب حداقل k محدودیت از M محدودیت	$y_1 + y_2 + ... + y_M \geq M - k$
۱۲	انتخاب دقیقاً k محدودیت از M محدودیت	$y_1 + y_2 + ... + y_M = M - k$

مثال

- در کارخانه‌ای که تنها یک محصول تولید می‌کند، (محصول B) مقدار تولید یا حداکثر به میزان 1000، واحد است، یا اینکه اصلاً از کالای B تولیدی صورت نمی‌گیرد. این وضعیت را مدلسازی نمائید.
- محصول B یا تولید نمی‌شود و یا در صورت تولید حداقل 500 و حداکثر 1000 واحد تولید خواهد شد.
- محصول B یا تولید نمی‌شود و یا در صورت تولید باید 500 واحد تولید شود.
- اگر محصول B در بسته‌های 300 یا 500یا 1000 تایی به‌فروش برسد، محدودیتی بنویسید که فروض محصول B را تضمین کند.

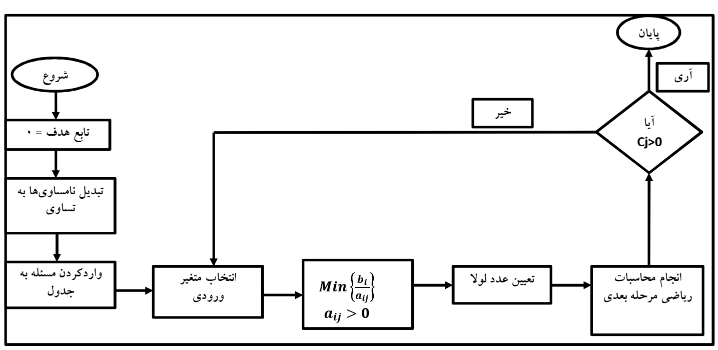
روش های حل



Page • 111

ملزومات ادامه درس

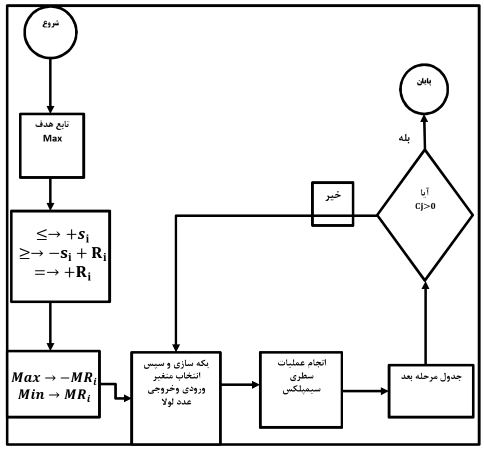
- روش هندسی
- روش سیمپلکس اولیه



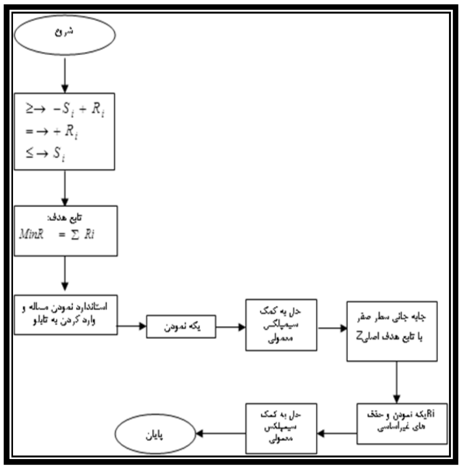
Page • 112

ملزومات ادامه درس

- **روش M**



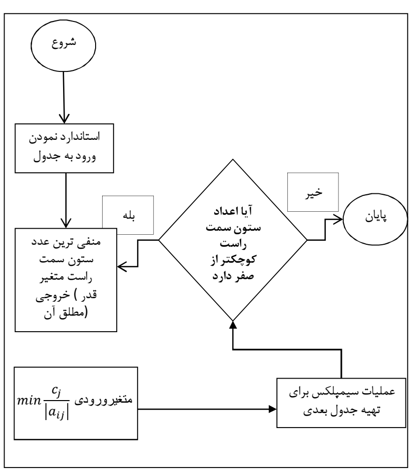
- **روش دو مرحله ای**



ملزومات ادامه درس

- **روش سیمپلکس ثانویه**

۱) مساله اولیه با تابع هدف حداکثرسازی یا Max و مساله ثانویه با تابع هدف حداقل‌سازی یا Min نوشته شود.
۲) به تعداد محدودیت‌های موجود در مساله اولیه، متغیر تصمیم در مساله ثانویه خواهیم داشت و به تعداد متغیرهای تصمیم در اولیه، محدودیت در ثانویه خواهیم داشت.
۳) ضرائب متغیرهای تصمیم در تابع هدف یا "C_j"ها نقش منابع را برای مساله ثانویه ایفا خواهند کرد.
۴) منابع مورد استفاده در مساله اولیه با "b_i" ها نقش ضرایب متغیرهای تصمیم را در ثانویه به عهده خواهد داشت.
۵) متغیرهای تصمیم در مساله ثانویه همان قیمت‌های سایه هستند و با "y_i" نمایش داده می‌شوند.
۶) محدودیت‌های مساله اولیه بهتر است از نوع کوچکتر مساوی و محدودیت‌های ثانویه از نوع بزرگ‌تر مساوی باشد.
۷) تمامی متغیرهای تصمیم در اولیه – ثانویه باید غیرمنفی باشند.
۸) اگر ضرائب متغیرهای تصمیم در اولیه a_{ij} باشد در ثانویه a_{ji} خواهد بود.



ساختار ماترسی مسائل برنامه ریزی خطی

$$MaxZ = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

$S.t:$

$\sum a_{ij}.x_j \le b_i$

$x_j \ge 0$

$MaxZ = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$

$S.t$

$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \le b_1$

$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \le b_2$

.

.

.

$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \le b_m$

$X_j \ge 0$

$i = 1,2,3,\ldots,m$

$j = 1,2,3,\ldots,n$

ردیف	شرح	ماتریس
۱	ماتریس ضرائب تابع هدف که با C نمایش داده می‌شوند	$C=[c_1,c_2,\ldots\ldots c_n]_{1\times n}$
۲	ماتریس متغیرهای تقسیم که با X نمایش داده	$X=\begin{bmatrix}x_1\\ .\\ x_n\end{bmatrix}_{n\times1}$
۳	ماتریس منابع یا محدودیت‌ها که با نماد b نمایش داده	$b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ .\\ b_m\end{bmatrix}_{m\times1}$
۴	ماتریس ضرائب فنی که با نماد A نمایش داده	$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots\ldots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots a_{2n}\\ . & \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots\ldots a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n}$

ساختار ماترسی مسائل برنامه ریزی خطی – ادامه

$$MaxZ = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$s.t:$

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + S_i = b_i$

$x_j \ge 0$

$MaxZ = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$

s.t:

$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \le b_1$

$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \le b_2$

.

.

.

$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \le b_m$

$X_j \,,\, S_i \ge 0$

$i = 1,2,3,\ldots,m$

$j = 1,2,3,\ldots,n$

ردیف	شرح	ماتریس
۵	ماتریس متغیرهای کمکی که با نماد S نمایش داده	$S=\begin{bmatrix}S_1\\ S_2\\ .\\ S_m\end{bmatrix}_{m\times1}$
۶	ماتریس یکه، که با نماد I نشان داده	$I=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{m\times m}$

شکل ریاضی تابلوی سیمپلکس

$B.V$	X_1	X_2	X_3	$\dots$	X_n	S_1	S_2	S_3	$\dots$	S_n	$R.h.s$
Z	$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$	$\dots$	$-C_n$	0	0	0	$\dots$	0	Z_0
X_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	1	0	0	$\dots$	0	b_1
X_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots$	a_{2n}	0	1	0	$\dots$	0	b_2
X_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\dots$	a_{3n}	0	0	1	$\dots$	0	b_3
.			.					.			.
.			.					.			.
.			.					.			.
X_n	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	$\dots$	a_{mn}	0	0	0	$\dots$	1	b_m

$Max\ Z = C.X$

s.t

$AX + IS = b$

$S, X \geq 0$

$Max\ Z = C.X$

s.t

$[A \quad I]\begin{bmatrix} X \\ S \end{bmatrix} = b$

$X, S \geq 0$

$$[A, I] = [N, B]$$

$$\begin{bmatrix} X \\ S \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} X_N \\ X_B \end{bmatrix}$$

$$Max\ Z = C.X$$

$s.t:$

$$[N, B].\begin{bmatrix} X_N \\ X_B \end{bmatrix} = b$$

$$X, S \geq 0$$

Page • 117

شکل ریاضی تابلوی سیمپلکس – ادامه

$B.V$	X_1	X_2	X_3	$\dots$	X_n	S_1	S_2	S_3	$\dots$	S_n	$R.h.s$
Z	$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$	$\dots$	$-C_n$	0	0	0	$\dots$	0	Z_0
X_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	1	0	0	$\dots$	0	b_1
X_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots$	a_{2n}	0	1	0	$\dots$	0	b_2
X_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\dots$	a_{3n}	0	0	1	$\dots$	0	b_3
.			.					.			.
.			.					.			.
.			.					.			.
X_n	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	$\dots$	a_{mn}	0	0	0	$\dots$	1	b_m

$$Max\ Z = C.X$$

$s.t:$

$$[N, B].\begin{bmatrix} X_N \\ X_B \end{bmatrix} = b$$

$$X, S \geq 0$$

$$[N, B].\begin{bmatrix} X_N \\ X_B \end{bmatrix} = b$$

$$N.X_N + B.X_B = b$$

$$N.X_N + B.X_B = b \xrightarrow{B^{-1}} B^{-1}.N.X_N + B^{-1}.B.X_B = B^{-1}b$$

$$B^{-1}.N.X_N + B^{-1}.B.X_B = B^{-1}b \xrightarrow{X_N=0} 0 + B^{-1}.B.X_B = B^{-1}b \rightarrow B^{-1}.B.X_B = B^{-1}b$$

$$B^{-1}.B.X_B = B^{-1}b \xrightarrow{B^{-1}.B=I} X_B = \bar{b} = B^{-1}.b$$

$$\bar{b} = B^{-1}.b$$

$$X_B = \bar{b} = B^{-1}.b$$

Page • 118

شکل ریاضی تابلوی سیمپلکس – ادامه

$B.V$	X_1	X_2	X_3	$\dots$	X_n	S_1	S_2	S_3	$\dots$	S_n	$R.h.s$
Z	$-C_1$	$-C_2$	$-C_3$	$\dots$	$-C_n$	0	0	0	$\dots$	0	Z_0
X_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	$\dots$	a_{1n}	1	0	0	$\dots$	0	b_1
X_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	$\dots$	a_{2n}	0	1	0	$\dots$	0	b_2
X_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	$\dots$	a_{3n}	0	0	1	$\dots$	0	b_3
.			.					.			.
.			.					.			.
.			.					.			.
X_n	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	$\dots$	a_{mn}	0	0	0	$\dots$	1	b_m

$$Max\ \ Z = C.X$$

$$s.t:$$

$$[N,B].\begin{bmatrix} X_N \\ X_B \end{bmatrix} = b$$

$$X, S \ge 0$$

$$Z = Cx = [C_B, C_N]\begin{bmatrix} X_B \\ X_N \end{bmatrix} = C_B.X_B + C_N.X_N$$

$$Z = C_B.X_B \rightarrow \begin{cases} X_B = B^{-1}b, \rightarrow Z = C_B.B^{-1}.b \\ X_B = \bar{b}, \qquad \rightarrow Z = C_B.\bar{b} \end{cases}$$

$$Z_j - C_j = \overline{C}_j = C_B.B^{-1}.N - C_N$$

,

$$Z_j - C_j = \overline{C}_j = C_B.\overline{P}_j - C_j$$

$$\overline{a}_{ij} = B^{-1}.a_{ij}$$

$$\overline{P}_j = B^{-1}.P_j$$

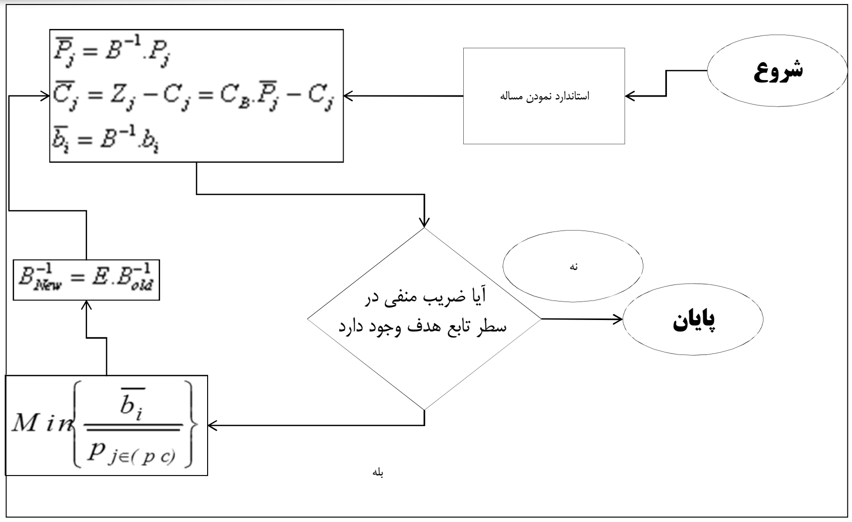
شکل ریاضی تابلوی سیمپلکس – ادامه

B.V	$x_1 \quad x_2 \dots\dots \dots\dots x_n \quad , \quad S_1 \quad S_2 \dots\dots \dots S_n$	R.h.s
Z	$C_B.\overline{P_j} - C_j$	$C_B.X_B = C_B.\overline{b}$
x_1 x_2 . . . x_n	$B^{-1}.P_j \qquad B^{-1}$	$B^{-1}.b$

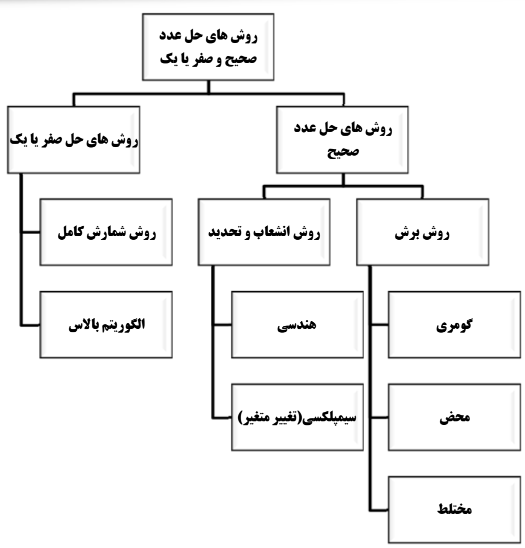
B.V	متغیرها	RHS
Z	$C_B.\overline{P_j} - c_j$	$C_B.X_B = C_B.\overline{b}$
X_B	$B^{-1}.P_j$	$B^{-1}.b$

- تحلیل حساسیت
- برنامه ریزی پارامتری

سیمپلکس تجدید نظر شده



فصل چهارم: حل مسائل عدد صحیح



انشعاب و تحدید هندسی

گام ۱) مساله را بدون در نظر گرفتن محدودیتهای عدد صحیح با استفاده از روش هندسی حل نمائید.

گام ۲) اگر جواب گام ۱ عدد صحیح بود مساله خاتمه یافته است در غیر اینصورت به گام سوم بروید.

گام ۳) متغیری که جواب غیر عدد صحیح دارد بین دو عدد صحیح محصور کنید

$x_1 = 5/2 \rightarrow 2 \le x_1 \le 3$

گام ۴) مرحله انشعاب. مساله اصلی را به دو مساله فرعی تبدیل نموده و به هر حالت یکی از محدودیت‌های زیر را اضافه و هر مساله فرعی را به روش هندسی حل نمائید.

$$\begin{aligned} &MaxZ = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \\ &S.t: \\ &\quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \le b_i \\ &x_j \le k \\ &x_j = Int \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &MaxZ = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \\ &S.t: \\ &\quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.x_j \le b_i \\ &x_j \ge k+1 \end{aligned}$$

انشعاب و تحدید هندسی – ادامه

گام ۵) جواب هر یک از مسائل فرعی را بدست آورده و در صورتی که در جواب صورت فرعی از جواب اصلی بهتر بود (برای تابع هدف Max بزرگتر و برای تابع هدف Min مقدار کوچکتر مطلوب‌تر است)، جواب اولیه را بهبود دهید (جواب کلی مساله را به جواب بهتر مساله قبلی تغییر دهید). در ابتدای توابع حداکثرسازی مقدار بهینه مساله کلی منفی بینهایت و برای مسائل حداقل‌سازی مثبت بینهایت در نظر گرفته می‌شود. سپس با هر تکرار و در صورت رسیدن به نقطه بهتر، جواب اولیه را بهبود دهید.

گام ۶) مرحله تحدید. در صورتی‌که هر انشعاب به عمق رسید آن شاخه را مسدود نمائید، شرایط به عمق رسیدن یکی از سه حالت زیر است:

انشعاب و تحدید هندسی – ادامه

الف) جواب مساله فرعی از جواب قبلی مساله بهتر باشد. در این حالت این انشعاب پاسخ بهتر را داشته و اگر تمامی متغیرهای آن عدد صحیح شده بود، بهترین جواب مساله تا آن لحظه همین انشعاب است.

ب) جواب مساله فرعی از جواب کلی مساله بدتر باشد.

ج) ناحیه موجهی برای حل مساله فرعی پیدا نشود. در این حالت مساله فرعی فاقد منطقه جواب موجه بوده و مساله به عمق رسیده است.

گام ۷) تمامی انشعاب ها را به همین طریق بررسی نموده و به عمق برسید، تا جواب نهائی مساله بدست آید.

برش گومری

برای اجتناب از تکرارها و انشعاب‌های روش انشعاب و تحدید هندسی و سیمپلکسی معادله‌ای به مساله برنامه‌ریزی عدد صحیح اضافه می‌کنیم، که این معادله منجر به انتخاب نقاطی می‌گردد که تماماً عدد صحیح است و به عبارتی به کمک معادله برش فضای جواب محدب تغییر کرده و نقطه حدی آن تماماً عدد صحیح می‌شود. این معادله برش باید دارای ویژگی باشد که هیچ یک از جواب‌های عدد صحیح موجه را از فضای جواب خارج نکند.

شرط استفاده

در معادله برش گومری شرط استفاده از معادله برش عدد صحیح بودن تمام ضرائب و اعداد محدودیت-هاست

برش گومری – ادامه

گام ۱) بدون در نظر گرفتن شرط عدد صحیح مساله را به روش سیمپلکس (هر نوعی از سیمپلکس) حل نمائید.

گام ۲) اگر خروجی گام یک در مقدار متغیرهای اساسی عدد صحیح بود مساله خاتمه یافته است، در غیر اینصورت به گام ۳ بروید.

گام ۳) معادله برش گومری را برای یکی از سطرها انتخاب کنید. سطر انتخابی باید طبق یکی از قواعد زیر انتخاب شود.

برش گومری – ادامه

قاعده اول) حداکثر مقدار جزء کسری مقادیر سمت راست را محاسبه کرده، سطری که جزء کسری بزرگتری دارد برای برش انتخاب می‌شود

قاعده دوم) اگر جزء کسری حداقل دو سطر با یکدیگر برابر بود قاعده اول کارائی نداشته و باید از قاعده دو استفاده نمود، طبق قاعده دوم حداکثر مقدار حاصل تقسیم جزء کسری مقادیر سمت راست به مجموع ضرائب فنی، ملاک خواهد بود

قاعده سوم) اگر دو قاعده فوق کارساز نبود، یک انشعاب را به دلخواه انتخاب نمائید

$$Max \left\{ \frac{[bi]_F}{\sum [s_{ij}]_F} \right\} \qquad Max\,\{[bi]_F\}$$

برش گومری – ادامه

گام ۴) پس از انتخاب سطر گومری معادله برش گومری را با استفاده از رابطه زیر بدست آورده و به انتهای جدول بهینه اضافه می‌کنیم

$$\sum [a_{ij}]_F . w_j + Sg_i = -[bi]_F$$

گام ۵) مساله را به روش سیمپلکس ثانویه حل کنید.

گام ۶) به گام ۲ بازگردید.

فصل پنجم: حل مسائل صفر یا یک

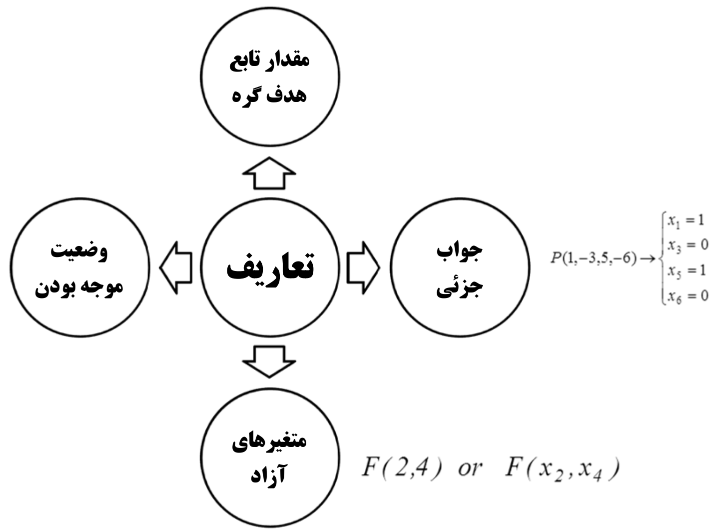
مقدمات الگوریتم بالاس

۱– تابع هدف مساله باید از جنس ماکزیمم باشد، در صورتی که از جنس مینیمم بود در یک منفی ضرب نمائید.

۲– تمامی محدودیت‌ها می‌بایست از نوع کوچکتر مساوی باشد. در صورتی که محدودیت بزرگتر مساوی بود، آن را در یک منفی ضرب کنید، و اگر از نوع مساوی بود ابتدا به دو نامساوی کوچک‌تر مساوی و بزرگ‌تر مساوی خرد نموده و سپس جزء بزرگتر مساوی را در یک منفی ضرب نمائید.

۳– ضرائب متغیرهای تصمیم در تابع هدف باید همگی منفی باشند

تعاریف الگوریتم بالاس



Page • 131

گام های الگوریتم بالاس

گام ۱) مساله را به فرم استاندارد الگوریتم بالاس تبدیل کنید یعنی سه شرط بیان شده حاضر باشند.

گام ۲) مقدار ابتدائی جواب مساله را منفی بینهایت در نظر بگیرید و تمامی متغیرهای مساله را آزاد فرض کنید.

گام ۳) مرحله انشعاب. یکی از متغیرهای تصمیم را برای انشعاب با شاخه کردن انتخاب کنید. این انشعاب باید براساس یکی از ضوابط زیر باشد.

۱– متغیر تصمیم آزادی در تمامی محدودیت‌ها ضریب عددی مثبت دارد از فهرست انشعاب حذف نمائید و مقدار آن را برای تمامی مراحل مساله صفر بگیرید.

۲– این ضابطه زمانی قابل استفاده است که یک جواب موجه اولیه به جزء Z_L بدست آورده باشد، بنابراین این ضابطه در تکرار اول غیر استفاده است. اگر متغیر تصمیم آزادی شرط زیر را دارا باشد از فهرست انشعاب مرحله مورد نظر (نه کل مساله) خارج خواهد شد. $Z_n + C_j \le Z_L$

Page • 132

گام های الگوریتم بالاس – ادامه

۳– از بین متغیرهای تصمیم آزادی که از دو ضابطه اول و دوم باقی مانده‌اند، متغیری را برای انشعاب انتخاب کنید که مقدار ارزشی آن از لحاظ قدر مطلق مینیمم باشد، ارزش هر متغیر تصمیم آزاد از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$V_j = \sum_{i=1}^{m} \min(0, S_i - a_{ij})$$

گام ۴) متغیر تصمیم انتخاب شده در گام ۳ را یکبار مقدار صفر و یکبار مقدار یک بدهید و برای هر انشعاب F, P, Z_n, S **را تعیین کنید. اگر** Z_n **موجه هر انشعاب از مقدار** Z_L **بهتر بود مقدار جدید** Z_L **را به** Z_n **تغییر دهید.**

$$Z_N \geq Z_L \rightarrow Z_{L(New)} = Z_N$$

گام های الگوریتم بالاس – ادامه

گام ۵) مرحله تحدید (به عمق رسیدن). در صورتیکه ضابطه های به عمق رسیدن برقرار بود، انشعاب بسته خواهد شد. این ضوابط عبارتند از:

۱– دسترسی به جواب موجه در هر انشعاب. در صورتیکه مقادیر S همگی محدودیتها مثبت بود، جواب انشعاب موردنظر موجه بوده و به عمق می‌رسد.

۲– عدم وجود متغیرهای آزاد. در صورتیکه در یک گره هیچ متغیر آزادی برای منشعب شدن وجود نداشته باشد، آن انشعاب به عمق خواهد رسید.

۳– تخریب جواب فعلی. در صورتیکه در یک انشعاب مقدار تابع هدف گره از مقدار تابع هدف مساله بدتر باشد، آن انشعاب به عمق خواهد رسید.

۴– در صورتیکه امکان دستیابی به جواب موجه وجود نداشته باشد آن گره به عمق خواهد رسید. برای بررسی این شرط اگر رابطه زیر صادق بود، آن گره به عمق خواهد رسید

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}(F)\right| < \left|S_i\right|$$

گام های الگوریتم بالاس – ادامه

گام ۶) اگر تمامی انشعاب ها به عمق رسید، مساله خاتمه یافته است، در غیر اینصورت به گام سوم بازگردید.

نرم افزارها

LINDO	QSB	LINGO
GAMS	DS	AIMMS
	WINQSB	

مقدمه

- نرم افزار Lindo ابزاری توانمند در حل مسائل برنامه ریزی خطی
- حل یک مدل به تنهایی نمی تواند جوابگوی کاربران و مدیران باشد؛
- ناگزیر به تحلیل حساسیت و تفسیر اقتصادی مدل؛
- تفسیر اقتصادی با توجه به مفاهیم قیمت های سایه و قیمت کاهش یافته (Reduced cost)؛

مبانی لیندو

- Lindo : Linear and Integer Discrete Optimizer
- به معنی بهینه ساز گسسته خطی و عدد صحیح؛
- برای حل مسائل:
  - برنامه ریزی خطی؛
  - برنامه ریزی عدد صحیح؛
  - برنامه های درجه دوم (Quadratic Programs)؛
- نسخه مخصوص ویندوز: بسیار ساده و در عین حال قدرتمند.

کاربرد

- مدل زیر را در نظر بگیرید:

$\text{Max } Z = 12\,X1 + 18\,X2 + 15\,X3$	تابع هدف
	S.t.
$5\,X1 + 4\,X2 + 3\,X3 \le 160$ دقیقه	محدودیت مربوط به زمان کاری ماشین آلات
$4\,X1 + 10\,X2 + 4\,X3 \le 288$ ساعت	محدودیت مربوط به نیروی انسانی
$2\,X1 + 2\,X2 + 4\,X3 \le 200$ کیلو	محدودیت مربوط به مواد
$X2 \le 16$ واحد	محدودیت مربوط به محصول شماره ۲

کاربرد

- با وارد کردن مدل در نرم افزار و حل کامل با آن، می توان به پرسشهای زیر در مدت زمانی اندک پاسخ داد و امکان ارائه تحلیلهای مختلف برای زمینه کاری مدل شده وجود دارد:

۱. آیا جواب بهینه وجود دارد؟

۲. در چندمین تکرار جواب بهینه حاصل می شود؟

۳. اگر مقدار ضرایب متغیرها در تابع هدف به مقدار دلخواه جدیدی تغییر کند، مقادیر متغیرهای تصمیم و مقدار نهایی تابع هدف چند می شود؟

۴. اگر مقدار ضرایب متغیرها در محدودیتها به مقدار دلخواه جدیدی تغییر کند، مقادیر متغیرهای تصمیم و مقدار نهایی تابع هدف چند می شود؟

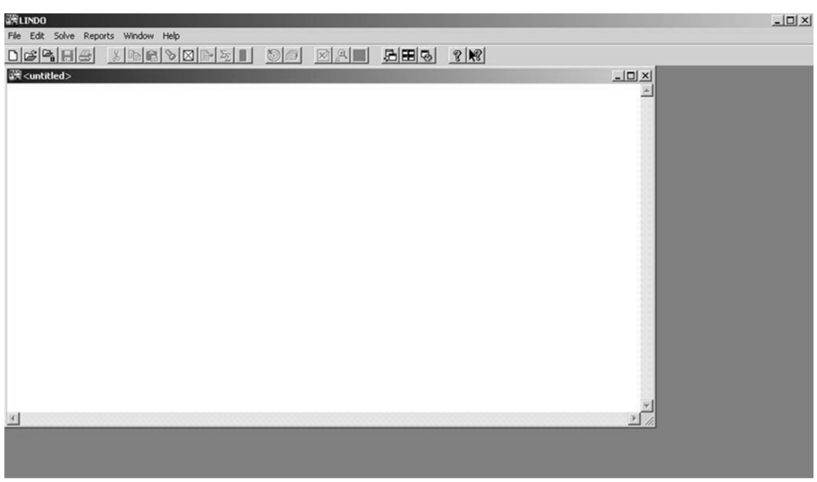
۵. بازه مجاز تغییرات ضرایب متغیرها در تابع هدف چیست؟

۶. بازه مجاز تغییرات مقادیر سمت راست محدودیتها چیست؟

۷. میزان تغییر در سود/ هزینه در صورت افزایش/ کاهش در یکی از متغیرهای تصمیم چقدر خواهد بود؟

ورود مدل به نرم افزار

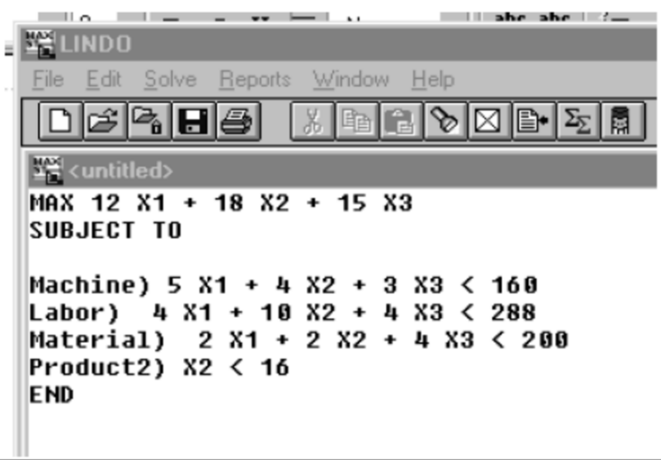
- پس از نصب نرم افزار بر روی سیستم خود و اجرای آن، تصویری مشابه شکل زیر ایجاد میشود.



ورود مدل به نرم افزار

- اولین کار: تایپ کردن مدل در پنجره داخلی؛
- برای شروع تعیین کنید که تابع هدف Max و یا Min؛
- پس از تعیین نوع تابع هدف، یک فاصله تایپ نموده و صرف نظر از عبارت =Z، ادامه عبارت مربوط به تابع هدف را وارد نرم افزار می کنیم؛
- پس از تابع هدف، برای نوشتن محدودیتها با زدن Enterیک خط به پایین آمده و عبارت Subject toکه مخفف همان .s.tکاربردی است را تایپ می کنیم؛
- مجدد یک خط پایین آمده و محدودیتها را با ورود ضرایب متغیر تصمیم و خود متغیرهای تصمیم و عملگرهای بین آنها (با رعایت یک فاصله بین هر آیتم) وارد سیستم می کنیم؛
- برای نوشتن توضیحات اضافی، قبل از علامت پرانتز "(" هرچه نوشته شود در برنامه دخالت داده نمی شود؛
- بر همین اساس می توان توضیحات مربوط به هر محدودیت را نیز به شیوه ای اختصاری در مدل وارد نمود.

ورود مدل به نرم افزار



نکات

- پس از Max و یا Min و همچنین بین ضرایب متغیرهای تصمیم و بین تمامی عملگرهای میان آنها باید فاصله (space)گذاشته شود؛
- نیازی به وارد نمودن عبارت مربوط به بزرگتر مساوی صفر بودن متغیرهای تصمیم در Lindo نمی باشد؛
- در انتهای برنامه (پس از تایپ آخرین محدودیت) باید کلمه Endتایپ شود.
- . برای علائم ≤ و ≥ نیز می توانید از <= و >= استفاده کنید.

گرفتن خروجی و تحلیل خروجی ها

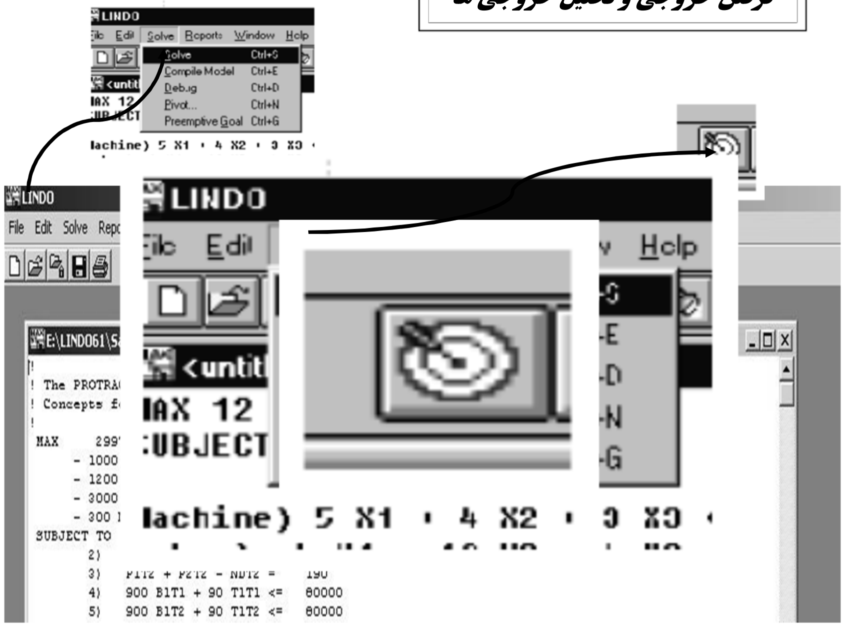
- پس از وارد نمودن مدل و اطمینان از رعایت نکات ذکر شده، باید دستور حل (Solve)به نرم افزار داده شود.

مراجعه به منوی Solve و انتخاب گزینه Solveامکانپذیر است

یا

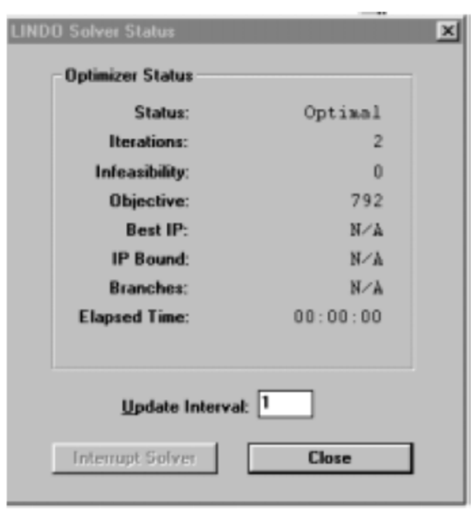
زدن دکمه میانبر

گرفتن خروجی و تحلیل خروجی ها



گرفتن خروجی و تحلیل خروجی ها

- **اطلاعات این پنجره**
  - **آیا وضعیت Status مساله بهینه است یا خیر؛**
  - **تعداد تکرارهای منجر به جواب نهایی؛**
  - **مقدار نهایی تابع هدف(Z^*)؛**
  - **زمان طی شده برای حل مساله.**



گرفتن خروجی و تحلیل خروجی ها

LINDO Solver Status

Optimizer Status

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      792.0000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         0.000000         10.200000
       X2         4.000000          0.000000
       X3        48.000000          0.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
 MACHINE)         0.000000          4.200000
   LABOR)        56.000000          0.000000
MATERIAL)         0.000000          0.600000
PRODUCT2)        12.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       2
```

- پنجره ای حاوی پرسش نیاز به ارائه اطلاعات تحلیلی بیشتر؛
- با انتخاب Yes پنجره جدیدی حاوی کلیه اطلاعات مورد نیاز برای تحلیل مساله ظاهر میشود؛

گرفتن خروجی و تحلیل خروجی ها

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      792.0000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X1         0.000000         10.200000
       X2         4.000000          0.000000
       X3        48.000000          0.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
 MACHINE)         0.000000          4.200000
   LABOR)        56.000000          0.000000
MATERIAL)         0.000000          0.600000
PRODUCT2)        12.000000          0.000000

NO. ITERATIONS=       2
```

- بیانگر هزینه هایی است که هر واحد باید کاهش دهد تا بتواند در تابع هدف بهینه نقش بهتری داشته باشد؛
- Reduce cost با استفاده از حاصلضرب قیمت های سایه در ضرایب تکنولوژی هر یک از محصولات به دست می آید؛
- برای تفسیر متغیرهای به کار می رود که درجواب مساله، نقشی نداشتند (مقدار صفر گرفته اند).

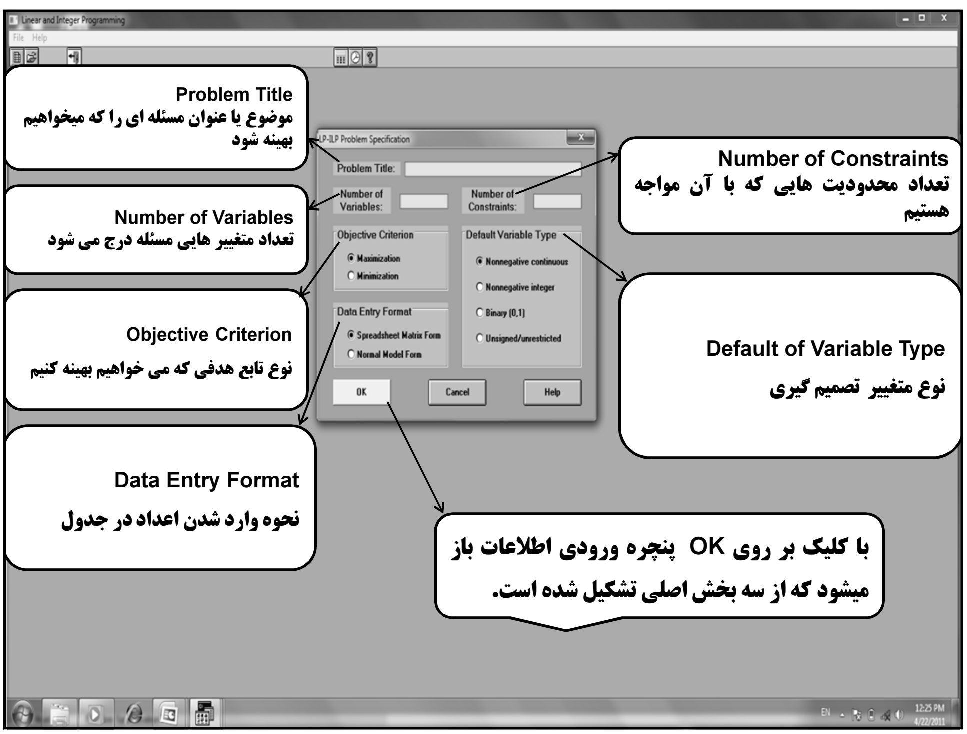
گرفتن خروجی و تحلیل خروجی ها

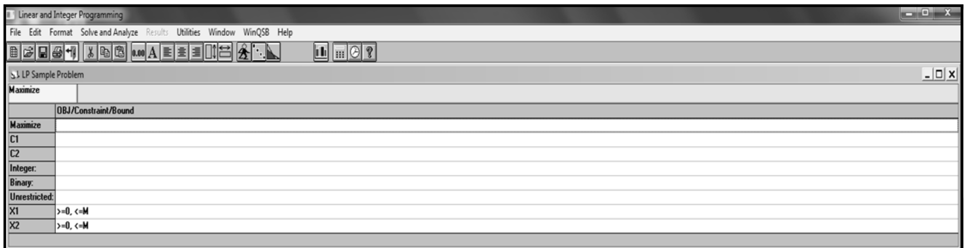
- در مساله به تعداد محدودیتهای موجود در آن مساله است؛
- قیمت های سایه بیانگر میزان بهبود مقدار بهینه تابع هدف به ازاء افزایش عدد سمت راست آن محدودیت به میزان یک واحد است؛
- قیمت های سایه یا قیمت های ثانویه، بیانگر ارزش اقتصادی هر واحد عدد سمت راست (منابع) است؛
- هرگاه میزان موجودی یک منبع به صفر نرسیده باشد قیمت سایه آن صفر و برعکس هنگامیکه موجودی یک منبع به صفر رسیده باشد قیمت سایه آن مخالف صفر خواهد بود.

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP    2

    OBJECTIVE FUNCTION VALUE

    1)    792.0000

 VARIABLE       VALUE         REDUCED COST
    X1        0.000000        10.200000
    X2        4.000000         0.000000
    X3       48.000000         0.000000

   ROW   SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
 MACHINE)        0.000000        4.200000
  LABOR)        56.000000        0.000000
MATERIAL)        0.000000        0.600000
PRODUCT2)       12.000000        0.000000

NO. ITERATIONS=     2
```

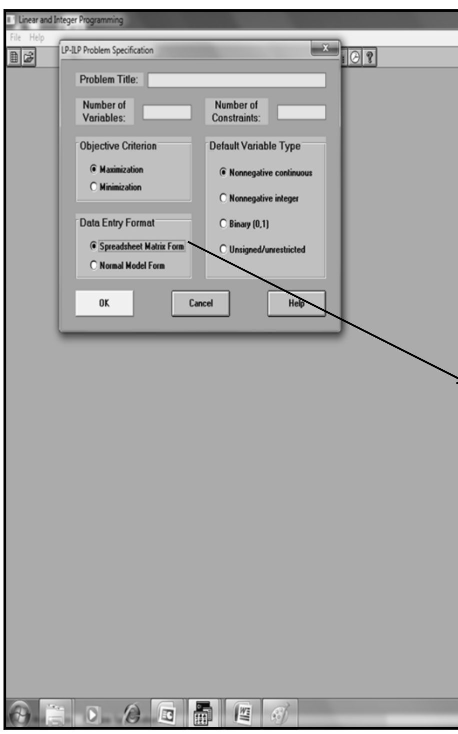
نرم افزار WINQSB


Linear and Integer Programming
LP-ILP Problem Specification
Problem Title:
Number of Variables:
Number of Constraints:
Objective Criterion
Maximization
Minimization
Default Variable Type
Nonnegative continuous
Nonnegative integer
Binary (0,1)
Unsigned/unrestricted
Data Entry Format
Spreadsheet Matrix Form
Normal Model Form
OK
Cancel
Help
در صفحه **Problem Specification** شش باکس ورودی وجود دارد
تا نوع مدلی که می خواهد وارد برنامه شود را تعیین کنیم.
Page • 153

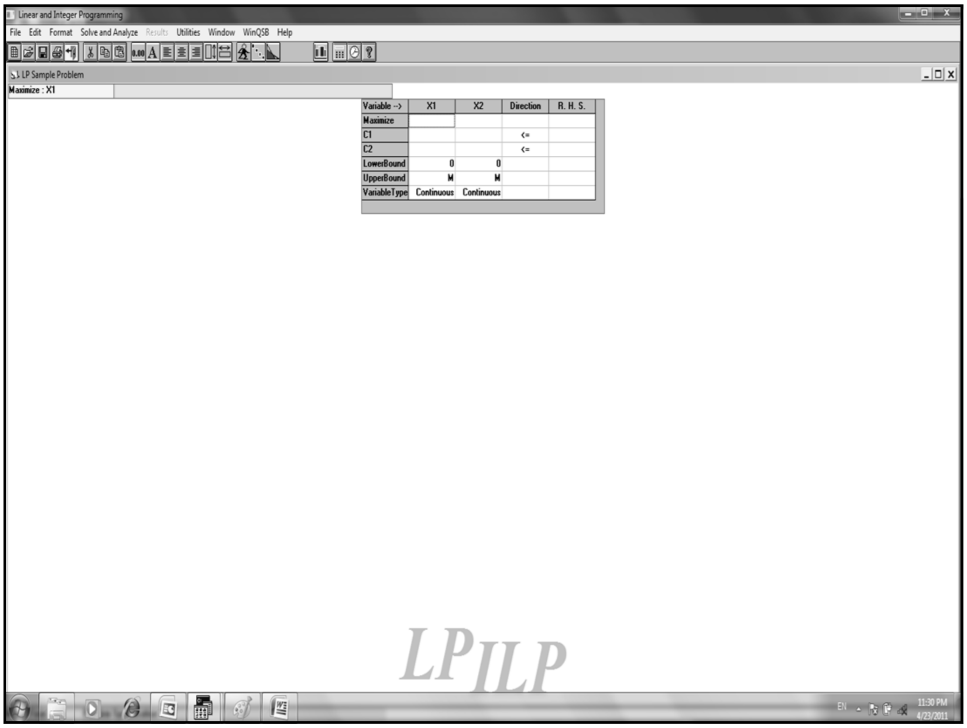

Linear and Integer Programming
Problem Title
موضوع یا عنوان مسئله ای را که میخواهیم بهینه شود
Number of Variables
تعداد متغییر هایی مسئله درج می شود
Objective Criterion
نوع تابع هدفی که می خواهیم بهینه کنیم
Data Entry Format
نحوه وارد شدن اعداد در جدول
Number of Constraints
تعداد محدودیت هایی که با آن مواجه هستیم
Default of Variable Type
نوع متغییر تصمیم گیری
با کلیک بر روی OK پنجره ورودی اطلاعات باز میشود که از سه بخش اصلی تشکیل شده است.
LP-ILP Problem Specification
Problem Title:
Number of Variables:
Number of Constraints:
Objective Criterion
Maximization
Minimization
Default Variable Type
Nonnegative continuous
Nonnegative integer
Binary (0,1)
Unsigned/unrestricted
Data Entry Format
Spreadsheet Matrix Form
Normal Model Form
OK
Cancel
Help

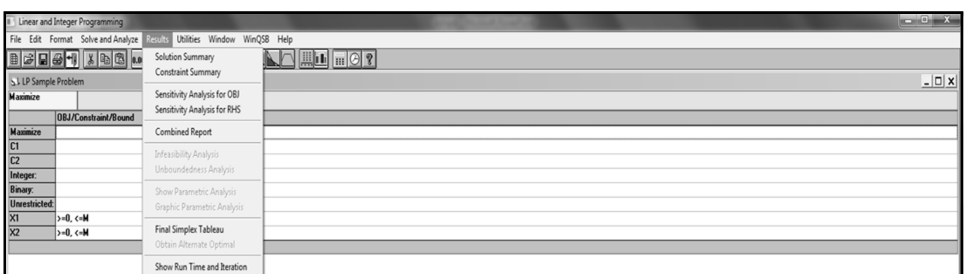


- عددی که جلوی متغیر X نوشته می شود اندیس متغیر است و عدد پشت آن ضریب متغییر به حساب می آید.
- برای نوشتن علامت بزرگتر و کوچکتر مساوی کافی است حرف بزرگتر یا کوچکتر را تایپ کرده و در جلوی آن مساوی را قرار دهیم.
- باکس آبی بالای جدول که نوشته های درون سلول ها در آن هم نمایش داده می شود یک غلط یاب اتوماتیک میباشد و به ما کمک می کند که اشتباهات و اشکالات خود را تصحیح کنیم.
- در قسمت Maximize تابع هدفی که قرار است ماکزیمم شود وارد می کنیم.
- در قسمت C1 تا C6 محدودیت های مسئله را وارد می کنیم.
- در قسمت X1 تا X4 دامنه متغییر های مسئله را مشخص می کنیم.



در صفحه
problem specification
در باکس آخر date entry format
که نحوه وارد شدن اعداد را مشخص
می کند که می توانیم از
spreadsheet matrix form
اعداد را در جدول simplex وارد
می نماییم.





- Solution Summary خلاصه جواب را نشان می دهد که شامل متغیرهای تصمیم گیری و جواب تابع هدف است
- Constraint Summary خلاصه جواب دستیابی به محدودیت ها را نشان می دهد
- Sensitivity Analysis for OBJ آنالیز حساسیت برای متغییر های تصمصم گیری را نمایش می دهد
- Sensitivity Analysis for RHS آنالیز حساسیت برای محدودیت ها را نمایش می دهد
- Graphic Parametric Analysis محدودیت و نقطه بهینه را بر روی نمودار نمایش می دهد

LP ILP

Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for LP Sample Problem

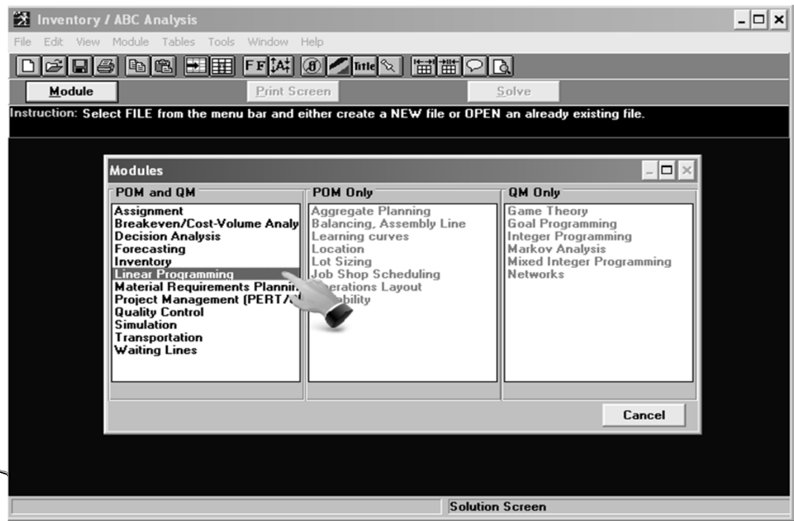
	18:46:38		Friday	April	22	2011		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0	0	0	0	at bound	-M	M
2	X2	0	0	0	0	at bound	-M	M
	Objective	Function	(Max.) =	0				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	0	=	0	0	0	0	M
2	C2	0	=	0	0	0	0	M

- **Objective Function میزان بهینه تابع هدف نشان داده شده است که در این مسئله ماکزیمم سود را به ما نشان می دهد.**
- **ستون Unit Cost or Profit بهینه ترین مقداری که هر متغییر به خود می تواند اختصاص دهد تا تابع هدف بهینه شود را نشان می دهد ستون Right Hand Side میزان حداکثر استفاده ای که محدودیت ها بنا به تعریفی که کردیم نشان می دهد و ستون Left Hand Side میزان استفاده از منابع را در هر محدودیت در حالت بهینه نشان می دهد**

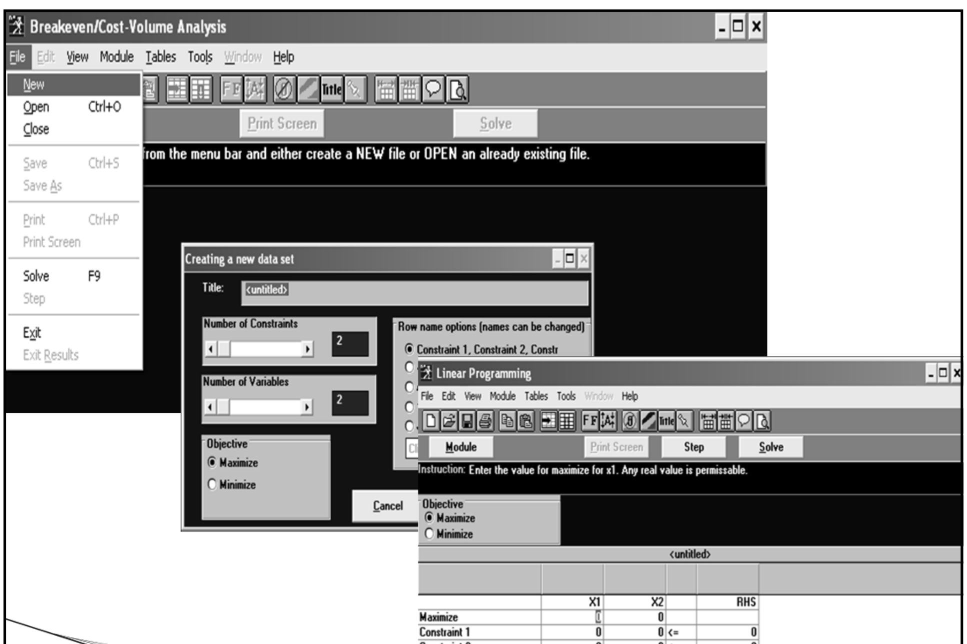
DS

160

Linear programming
مدلهای برنامه ریزی خطی

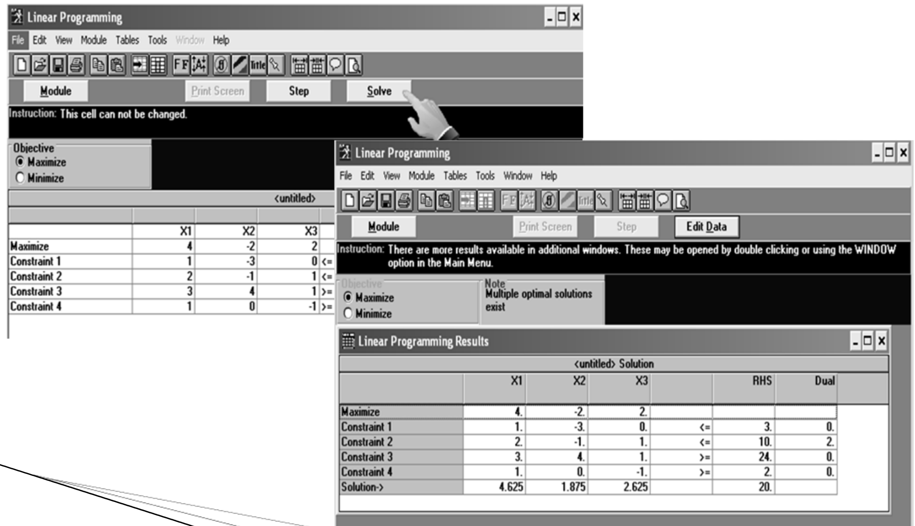


DS



DS

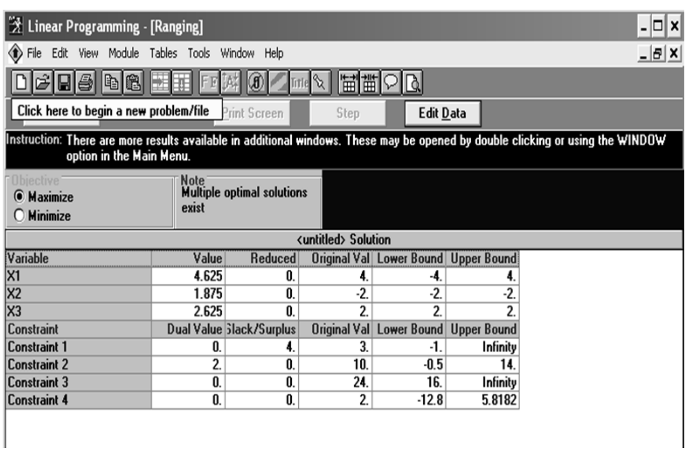
linear programming results



	X1	X2	X3		RHS	Dual
Maximize	4.	-2.	2.			
Constraint 1	1.	-3.	0.	<=	3.	0.
Constraint 2	2.	-1.	1.	<=	10.	2.
Constraint 3	3.	4.	1.	>=	24.	0.
Constraint 4	1.	0.	-1.	>=	2.	0.
Solution->	4.625	1.875	2.625		20.	

Data Mining

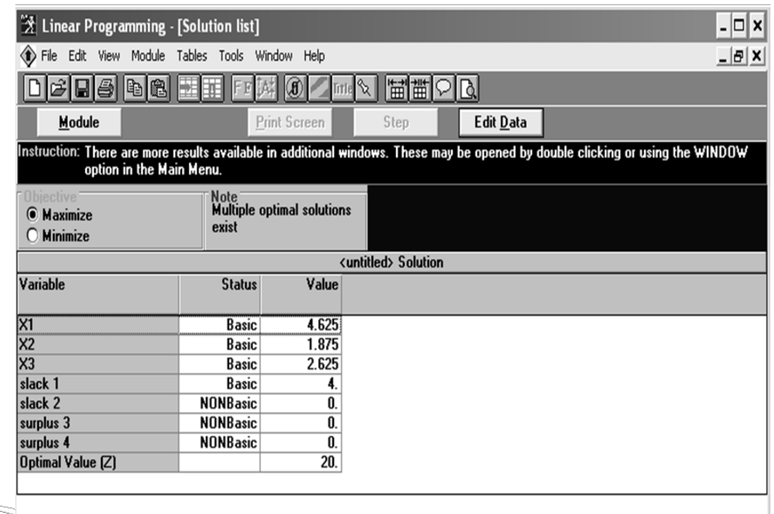
Ranging



Variable	Value	Reduced	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	4.625	0.	4.	-4.	4.
X2	1.875	0.	-2.	-2.	-2.
X3	2.625	0.	2.	2.	2.
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Constraint 1	0.	4.	3.	-1.	Infinity
Constraint 2	2.	0.	10.	-0.5	14.
Constraint 3	0.	0.	24.	16.	Infinity
Constraint 4	0.	0.	2.	-12.8	5.8182

DS

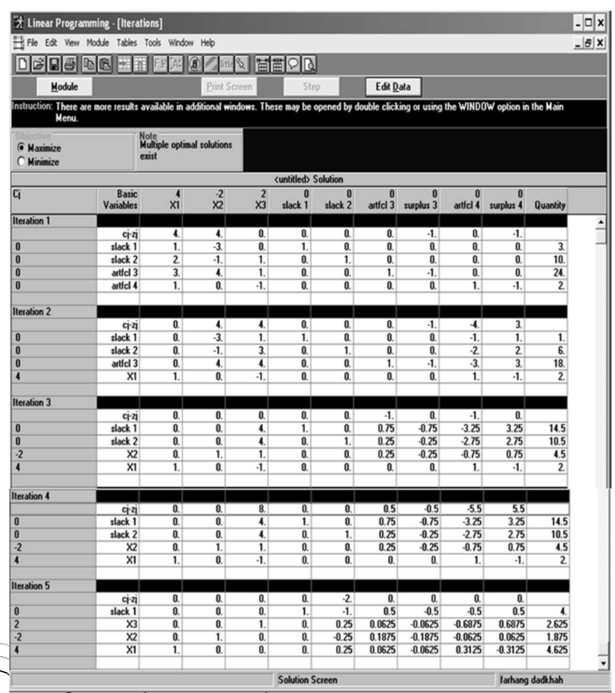
solution list



Variable	Status	Value
X1	Basic	4.625
X2	Basic	1.875
X3	Basic	2.625
slack 1	Basic	4.
slack 2	NONBasic	0.
surplus 3	NONBasic	0.
surplus 4	NONBasic	0.
Optimal Value (Z)		20.

DS

Iterations



Cj	Basic Variables	4 X1	-2 X2	2 X3	0 slack 1	0 slack 2	0 artfcl 3	0 surplus 3	0 artfcl 4	0 surplus 4	Quantity
Iteration 1											
	cj-zj	4.	4.	0.	0.	0.	0.	-1.	0.	-1.	
0	slack 1	1.	-3.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	0.	3.
0	slack 2	2.	-1.	1.	0.	1.	0.	0.	0.	0.	10.
0	artfcl 3	3.	4.	1.	0.	0.	1.	-1.	0.	0.	24.
0	artfcl 4	1.	0.	-1.	0.	0.	0.	0.	1.	-1.	2.
Iteration 2											
	cj-zj	0.	4.	4.	0.	0.	0.	-1.	-4.	3.	
0	slack 1	0.	-3.	1.	1.	0.	0.	0.	-1.	1.	1.
0	slack 2	0.	-1.	3.	0.	1.	0.	0.	-2.	2.	6.
0	artfcl 3	0.	4.	4.	0.	0.	1.	-1.	-3.	3.	18.
4	X1	1.	0.	-1.	0.	0.	0.	0.	1.	-1.	2.
Iteration 3											
	cj-zj	0.	0.	0.	0.	0.	-1.	0.	-1.	0.	
0	slack 1	0.	0.	4.	1.	0.	0.75	-0.75	-3.25	3.25	14.5
0	slack 2	0.	0.	4.	0.	1.	0.25	-0.25	-2.75	2.75	10.5
-2	X2	0.	1.	1.	0.	0.	0.25	-0.25	-0.75	0.75	4.5
4	X1	1.	0.	-1.	0.	0.	0.	0.	1.	-1.	2.
Iteration 4											
	cj-zj	0.	0.	8.	0.	0.	0.5	-0.5	-5.5	5.5	
0	slack 1	0.	0.	4.	1.	0.	0.75	-0.75	-3.25	3.25	14.5
0	slack 2	0.	0.	4.	0.	1.	0.25	-0.25	-2.75	2.75	10.5
-2	X2	0.	1.	1.	0.	0.	0.25	-0.25	-0.75	0.75	4.5
4	X1	1.	0.	-1.	0.	0.	0.	0.	1.	-1.	2.
Iteration 5											
	cj-zj	0.	0.	0.	0.	-2.	0.	0.	0.	0.	
0	slack 1	0.	0.	0.	1.	-1.	0.5	-0.5	-0.5	0.5	4.
2	X3	0.	0.	1.	0.	0.25	0.0625	-0.0625	-0.6875	0.6875	2.625
-2	X2	0.	1.	0.	0.	-0.25	0.1875	-0.1875	-0.0625	0.0625	1.875
4	X1	1.	0.	0.	0.	0.25	0.0625	-0.0625	0.3125	-0.3125	4.625

DS

روش لینمپ

- ارزیابی m گزینه؛ $A_1, A_2, \ldots, A_m$
- بر اساس n معیار (شاخص)؛ $X_1, X_2, \ldots, X_n$
- تصمیم گیرنده مجموعه‌ای از ترجیحات اولیه خود در رابطه با گزینه‌ها را مشخص نموده باشد؛ $\Omega = \{(k,l) | (A_k, A_l) \in (A_1, A_2, \ldots A_m), A_k \succ A_l\}$
- تصمیم گیرنده گزینه k را بر L ترجیح می‌دهد؛ $\Omega = (k,l)$ $n(\Omega) = m(m-1)$
- ایده اصلی تعیین یک بردار ایده‌آل مثبت به گونه‌ای است که گزینه‌ها بر اساس فاصله خود با این بردار ایده‌آل رتبه‌بندی شوند؛ $A^+ = \{r_1^*, r_2^*, \ldots, r_n^*\}$

روش لینمپ – ادامه

- فاصله هر گزینه از این بردار ایده‌آل نیز به صورت فاصله موزون محاسبه می‌گردد و در نتیجه یکی دیگر از خروجی‌های مدل، تعیین بردار اوزان اهمیت معیارهای تصمیم‌گیری است.

$$W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$$

- گام اول – تعریف فاصله هر گزینه از بردار ایده‌آل مثبت؛

$$d_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j \left(r_{ij} - r_j^*\right)^2}$$

روش لینمپ – ادامه

- گام دوم – مربع فاصله هر گزینه با ایده‌آل مثبت؛ $s_i = d_i^۲$

- گام سوم – محاسبه شاخص ناهماهنگی؛

$$(s_l - s_k)^- = \begin{cases} s_k - s_l & \text{if} \quad s_k \succ s_l \\ ۰ & \text{if} \quad s_k \le s_l \end{cases} \rightarrow (s_l - s_k)^- = \max(۰, s_k - s_l)$$

- گام چهارم – محاسبه شاخص ناسازگاری کل؛

$$I = \sum_{(k,l)\in\Omega} (s_l - s_k)^- = \sum_{(k,l)\in\Omega} max(۰, s_k - s_l)$$

Page • 169

روش لینمپ – ادامه

- گام پنجم – محاسبه شاخص سازگاری؛

$$(s_l - s_k)^+ = \begin{cases} s_l - s_k & \text{if} \quad s_k \le s_l \\ ۰ & \text{if} \quad s_k \succ s_l \end{cases} \rightarrow (s_l - s_k)^+ = \max(۰, s_l - s_k)$$

- گام ششم – محاسبه شاخص سازگاری کل؛

$$C = \sum_{(k,l)\in\Omega} (s_l - s_k)^+ = \sum_{(k,l)\in\Omega} max(۰, s_l - s_k)$$

Page • 170

روش لینمپ – ادامه

- گام هفتم – کمینه‌سازی شاخص ناسازگاری کل؛

$$
\begin{aligned}
&C \succ I\\
&C - I = h\\
&(s_l - s_k)^{+} - (s_l - s_k)^{-} = s_l - s_k\\
&\sum_{(k,l)\in\Omega} (s_l - s_k) = h
\end{aligned}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\min I = \min \sum_{(k,l)\in\Omega} \max(0, s_k - s_l)\\
&S.T.\\
&\sum_{(k,l)\in\Omega} (s_l - s_k) = h
\end{aligned}\right\}
\xrightarrow{z_{kl} = \max(0, s_k - s_l)}
\left\{\begin{aligned}
&\min \sum_{(k,l)\in\Omega} z_{kl}\\
&S.T.\\
&(s_l - s_k) + z_{kl} \geq 0, (k,l)\in\Omega\\
&\sum_{(k,l)\in\Omega} (s_l - s_k) = h\\
&z_{kl} \geq 0, (k,l)\in\Omega
\end{aligned}\right.
$$

روش لینمپ – ادامه

- گام هفتم – کمینه‌سازی شاخص ناسازگاری کل؛

$$
\left\{\begin{aligned}
&s_l - s_k = \sum_{j=1}^{n} w_j (r_{lj} - r_j^*)^2 - \sum_{j=1}^{n} w_j (r_{kj} - r_j^*)^2\\
&= \sum_{j=1}^{n} w_j (r_{lj}^2 - r_{kj}^2)^2 - 2\sum_{j=1}^{n} w_j r_j^* (r_{lj} - r_{kj})
\end{aligned}\right\}
\rightarrow
\left\{\begin{aligned}
&\min \sum_{(k,l)\in\Omega} z_{kl}\\
&S.T.\\
&\sum_{j=1}^{n} w_j (r_{lj}^2 - r_{kj}^2) - 2\sum_{j=1}^{n} v_j (r_{lj} - r_{kj}) + z_{kl} \geq 0, (k,l)\in\Omega\\
&\sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{(k,l)\in\Omega} (r_{lj}^2 - r_{kj}^2) - 2\sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{(k,l)\in\Omega} (r_{lj} - r_{kj}) = h\\
&w_j \geq 0, j = 1,2,\ldots,n\\
&z_{kl} \geq 0, (k,l)\in\Omega
\end{aligned}\right\}
$$

جواب های ممکن

۱) اگر $w_j^* \succ 0$، آنگاه $r_j^* = v_j^* / w_j^*$؛

۲) اگر $w_j^* = 0$ و $v_j^* = 0$، تعریف کنید $r_j^* = 0$؛

۳) اگر $w_j^* = 0$ و $v_j^* \succ 0$، تعریف کنید $r_j^* = +\infty$؛

۱) اگر $w_j^* = 0$ و $v_j^* \prec 0$، تعریف کنید $r_j^* = -\infty$؛

در نهایت، چنانچه j' مجموعه شاخصهایی با $w_j^* \succ 0$ و j'' مجموعه شاخصهایی با $w_j^* = 0$ و $v_j^* \neq 0$ باشند، فاصله s_i هر گزینه از بردار ایده‌آل

$$s_i = \sum_{j'} w_{j'}^* \left(r_{ij'} - r_{j'}^*\right)^2 - 2\sum_{j''} v_{j''}^* r_{ij''}$$

مثال

- ارزیابی و انتخاب چهار هواپیمای جنگنده توسط یک کشور بر اساس سه معیار حداکثر سرعت، برد پرواز و بار مفید؛

	x_1	x_2	x_3
A_1	۲	۱.۵	۲
A_2	۲.۵	۲.۷	۱.۸
A_3	۱.۸	۲	۲.۱
A_4	۲.۲	۱.۸	۲

$$\Omega = \{(1,2),(1,3),(4,1),(3,2),(2,4),(3,4)\}$$
$$h = 1$$

لینمپ خاکستری

- گام اول – بی مقیاس‌سازی ماتریس تصمیم‌گیری خاکستری؛
- گام دوم – محاسبه فاصله میان هر گزینه از بردار ایده‌آل؛

$$\left\{\begin{array}{l} A^{+}=\{\otimes n_1^*,\otimes n_2^*,\dots,\otimes n_n^*\} \\ \otimes r_j^*=[\underline{n}_j^*,\overline{n}_j^*] \\ j=1,2,\dots,n \end{array}\right\} \rightarrow d_i=\sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j\left[\left(\underline{n}_{ij}-\underline{n}_j^*\right)^2+\left(\overline{n}_{ij}-\overline{n}_j^*\right)^2\right]}$$

$$\begin{pmatrix} s_i=d_i^2 \\ C,I \end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \max C=\max \sum_{(k,l)\in\Omega} \max(0,s_l-s_k) \\ S.T. \\ \sum_{(k,l)\in\Omega}(s_l-s_k)\geq h \\ w_j\geq 0,\ j=1,2,\dots,n \end{array}\right\}$$

لینمپ خاکستری – ادامه

$$\begin{array}{l} \max \sum_{(k,l)\in\Omega} z_{kl} \\ S.T. \\ \sum_{(k,l)\in\Omega}(s_k-s_l)+h\leq 0 \\ s_k-s_l+z_{kl}\geq 0,\ \forall(k,l)\in\Omega \\ z_{kl}\geq 0, \qquad \forall(k,l)\in\Omega \\ w_j\geq 0,\ j=1,2,\dots,n \end{array}$$

$$s_k-s_l=\sum_{j=1}^{n} w_j\left(\underline{n}_{kj}^2+\overline{n}_{kj}^2-\underline{n}_{lj}^2-\overline{n}_{lj}^2\right)+\sum_{j=1}^{n} 2w_j\underline{n}_j^*\left(\underline{n}_{lj}-\underline{n}_{kj}\right)$$
$$+\sum_{j=1}^{n} 2w_j\overline{n}_j^*\left(\overline{n}_{lj}-\overline{n}_{kj}\right)$$

لینمپ حاکستری – ادامه

$$
\left.\begin{array}{l}\underline{v}_j = w_j \underline{n}_j^* \\ \overline{v}_j = w_j \overline{n}_j^*\end{array}\right\} \Rightarrow
\left\{\begin{array}{l}
\max \sum_{(k,l)\in\Omega} z_{kl} \\
S.T. \\
\sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{(k,l)\in\Omega} \left(\underline{n}_{kj}^2 + \overline{n}_{kj}^2 - \underline{n}_{lj}^2 - \overline{n}_{lj}^2\right) + \sum_{j=1}^{n} 2\underline{v}_j \sum_{(k,l)\in\Omega} \left(\underline{n}_{lj} - \underline{n}_{kj}\right) \\
+ \sum_{j=1}^{n} 2\overline{v}_j \sum_{(k,l)\in\Omega} \left(\overline{n}_{lj} - \overline{n}_{kj}\right) + h \le 0 \\
\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\underline{n}_{kj}^2 + \overline{n}_{kj}^2 - \underline{n}_{lj}^2 - \overline{n}_{lj}^2\right) + \sum_{j=1}^{n} 2\underline{v}_j \left(\underline{n}_{lj} - \underline{n}_{kj}\right) \\
+ \sum_{j=1}^{n} 2\overline{v}_j \left(\overline{n}_{lj} - \overline{n}_{kj}\right) + z_{kl} \ge 0, \forall (k,l) \in \Omega \\
z_{kl} \ge 0, \quad \forall (k,l) \in \Omega \\
\underline{v}_j \le \overline{v}_j, j = 1,2,\ldots,n \\
w_j \ge 0, \; j = 1,2,\ldots,n
\end{array}\right.
$$

مثال

	ریسک ساختاری	سازگاری با ماموریت
A_1	[۶، ۷]	[۴، ۵]
A_2	[۶، ۷]	[۵، ۶]
A_3	[۳، ۴]	[۴، ۵]
A_4	[۵، ۶]	[۶، ۶]
A_5	[۷، ۸]	[۷، ۹]

$$
\Omega = \{(2,1),(3,2),(4,3),(5,4)\}
$$
$$
h = 1
$$

لینمپ فازی

- گام اول – بی مقیاس سازی

$$C^{+} \rightarrow \tilde{n}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{b_{ij}^{\max}}, \frac{m_{ij}^{1}}{m_{ij}^{2\max}}, \frac{m_{ij}^{2}}{m_{ij}^{1\max}} \wedge 1, \frac{b_{ij}}{a_{ij}^{\max}} \wedge 1 \right)$$

$$C^{-} \rightarrow \tilde{n}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}^{\min}}{b_{ij}}, \frac{m_{ij}^{1\min}}{m_{ij}^{2}}, \frac{m_{ij}^{2\min}}{m_{ij}^{1}} \wedge 1, \frac{b_{ij}^{\min}}{a_{ij}} \wedge 1 \right)$$

$$\text{for ideal } \tilde{a}^{*} = \left(\tilde{a}_{1}^{*}, \tilde{a}_{2}^{*}, \ldots, \tilde{a}_{m}^{*}\right) \rightarrow s_{i} = \sum_{j=1}^{n} w_{i} \left[d\left(\tilde{n}_{ij}, \tilde{a}_{j}^{*}\right) \right]^{2}$$

$$\tilde{n}_{ij} = \left(n_{ij1}, n_{ij2}, n_{ij3}, n_{ij4}\right)$$

لینمپ فازی – ادامه

$$\text{for ideal } \tilde{a}^{*} = \left(\tilde{a}_{1}^{*}, \tilde{a}_{2}^{*}, \ldots, \tilde{a}_{m}^{*}\right) \rightarrow s_{i} = \sum_{j=1}^{n} w_{i} \left[d\left(\tilde{n}_{ij}, \tilde{a}_{j}^{*}\right) \right]^{2}$$

$$\tilde{n}_{ij} = \left(n_{ij1}, n_{ij2}, n_{ij3}, n_{ij4}\right)$$

$$d_{v}\left(\tilde{a}_{1}, \tilde{a}_{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{6}\left[(a_{1}-a_{2})^{2} + 2\left(m_{1}^{1}-m_{2}^{1}\right)^{2} + 2\left(m_{1}^{2}-m_{2}^{2}\right)^{2} + (b_{1}-b_{2})^{2} \right]}$$

$$d_{v}\left(\tilde{a}_{1}, \tilde{a}_{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{6}\left[(a_{1}-a_{2})^{2} + 4\left(m_{1}-m_{2}\right)^{2} + (b_{1}-b_{2})^{2} \right]}$$

لینمپ فازی – ادامه

$$\max \sum_{(k,l)\in\Omega} z_{kl}$$

$$S.T.$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{(k,l)\in\Omega} \left[\left(n_{lj1}^{2} - n_{kj1}^{2}\right) + 2\left(n_{lj2}^{2} - n_{kj2}^{2}\right) + 2\left(n_{lj3}^{2} - n_{kj3}^{2}\right) + \left(n_{lj4}^{2} - n_{kj4}^{2}\right)\right]$$

$$-2\left[\sum_{j=1}^{n} v_{j1} \sum_{(k,l)\in\Omega}\left(n_{lj1} - n_{kj1}\right) + 2\sum_{j=1}^{n} v_{j2} \sum_{(k,l)\in\Omega}\left(n_{lj2} - n_{kj2}\right) + \right.$$

$$\left. 2\sum_{j=1}^{n} v_{j3} \sum_{(k,l)\in\Omega}\left(n_{lj3} - n_{kj3}\right) + \sum_{j=1}^{n} v_{j4} \sum_{(k,l)\in\Omega}\left(n_{lj4} - n_{kj4}\right)\right] \ge 6h$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \left[\left(n_{kj1}^{2} - n_{lj1}^{2}\right) + 2\left(n_{kj2}^{2} - n_{lj2}^{2}\right) + 2\left(n_{kj3}^{2} - n_{lj3}^{2}\right) + \left(n_{kj4}^{2} - n_{lj4}^{2}\right)\right]$$

$$-2\left[\sum_{j=1}^{n} v_{j1}\left(n_{kj1} - n_{lj1}\right) + 2\sum_{j=1}^{n} v_{j2}\left(n_{kj2} - n_{lj2}\right) + 2\sum_{j=1}^{n} v_{j3}\left(n_{kj3} - n_{lj3}\right)\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{n} v_{j4}\left(n_{kj4} - n_{lj4}\right)\right] + 6 z_{kl} \ge 0, \forall (k,l)\in\Omega$$

$$z_{kl} \ge 0, \quad \forall (k,l)\in\Omega$$

$$v_{j1}, v_{j2}, v_{j3}, v_{j4} \ge 0, \; j = 1,2,\ldots,n$$

$$w_j \ge 0, \; j = 1,2,\ldots,n$$

$$\tilde{v}_j = \left(v_{j1}, v_{j2}, v_{j3}, v_{j4}\right) = w_j \tilde{n}_{ij}$$

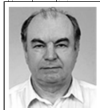
مثال

	x_5	x_6
A_1	(۰.۳، ۰.۴، ۰.۵، ۰.۶)	(۰.۷، ۰.۸، ۰.۹، ۰.۱)
A_2	(۰.۱، ۰.۲، ۰.۳، ۰.۴)	(۰.۳، ۰.۴، ۰.۵، ۰.۶)
A_3	(۰.۵، ۰.۶، ۰.۷، ۰.۸)	(۰.۵، ۰.۶، ۰.۷، ۰.۸)
A_4	(۰.۳، ۰.۴، ۰.۵، ۰.۶)	(۰.۳، ۰.۴، ۰.۵، ۰.۶)

$$\Omega = \{(A_1, A_2), (A_3, A_2), (A_1, A_3), (A_3, A_4)\}$$

$$h = 1$$

روش ویکور



Serafim Opricovic

- مسائل تصمیم‌گیری گسسته با شاخص‌های نامتناسب و متضاد؛
- رتبه‌بندی و انتخاب از میان مجموعه‌ای از راهکارها با توجه به معیارهای متضاد چندگانه؛
- رتبه‌بندی گزینه‌ها با در نظر گرفتن چند معیار بر اساس معیارهای نزدیکی به راهکار ایده‌آل؛
- تابع تجمعی تحت عنوان کیو؛
- سادگی ساختار مفهومی؛
- ابتدا برای هر گزینه یک فاصله ترکیبی محاسبه می‌گردد. در نتیجه گزینه‌ای که کوچکترین فاصله ترکیبی را دارد، به عنوان گزینه ارجح پذیرفته می‌شود.

Višekriterijumsko kompromisno rangiranje (VIKOR)

روش ویکور – ادامه

$$C^+ \rightarrow \begin{Bmatrix} f_j^* = \max_i f_{ij} \\ f_j^- = \min_i f_{ij} \end{Bmatrix}$$

$$C^- \rightarrow \begin{Bmatrix} f_j^- = \max_i f_{ij} \\ f_j^* = \min_i f_{ij} \end{Bmatrix}$$

$$S_i = \sum_{j=۱}^{n} w_j \left(f_j^* - f_{ij}\right) / \left(f_j^* - f_j^-\right)$$

$$R_i = \max_j \left[w_j \left(f_j^* - f_{ij}\right) / \left(f_j^* - f_j^-\right) \right]$$

- ❑ بیشترین مطلوبیت گروهی برای اکثریت
- ❑ کمترین تأثیر نامطلوب فردی

$$Q_i = v\left(S_i - S^*\right)/\left(S^- - S^*\right) + \left(۱ - v\right)\left(R_i - R^*\right)/\left(R^- - R^*\right)$$

$$S^- = \max_i S_i,\ R^- = \max_i R_i$$

$$S^* = \min_i S_i,\ R^* = \min_i R_i$$

<u>وزن استراتژی "اکثریت معیارها" (یا "حداکثر مطلوبیت گروه")</u>

اتکا به رأی اکثریت	$v \succ ۰.۵$
نگرش توافقی تصمیم گیرندگان	$v = ۰.۵$
حق ردی	$v \prec ۰.۵$

ویکور – ادامه

o گزینه‌ها را براساس S ، R و Q به ترتیب صعودی رتبه‌بندی کنید. در نتیجه سه فهرست رتبه‌بندی به دست می‌آید؛

در صورت برقراری شرایط زیر، راهکار سازشی، بر اساس حداقل مقدار کیو به عنوان بهترین گزینه رتبه‌بندی می‌شود.

شرط اول: مزیت قابل قبول: $Q(A^{(2)}) - Q(A^{(1)}) \geq DQ$ که در آن $DQ = 1/(m-1)$ که m تعداد گزینه‌ها بوده و راهکار $A^{(2)}$ در فهرست رتبه‌بندی Q در رتبه دوم قرار دارد.

شرط دوم: گزینه اول در فهرست رتبه‌بندی S و R نیز در جایگاه برتر قرار داشته باشد و این راهکار سازشی در فرآیند تصمیم‌گیری ثابت باقی بماند.

در صورتی که یکی از شرایط فوق برآورده نگردد، مجموعه‌ای از راهکارهای سازشی به شرح موارد ذیل پیشنهاد می‌گردد:

- در صورتی که شرط اول برآورده نگردد، گزینه‌هایی به عنوان جواب سازشی شناخته می‌شوند که $A^{(p)}$ بر حسب رابطه $Q(A^{(p)}) - Q(A^{(1)}) \geq DQ$ به ازاء حداکثر مقدار p تعیین می‌شود.

در صورتی که شرط دوم برآورده نگردد، تصمیم‌گیری دارای ثبات نبوده و گزینه اول دارای مزیت قابل قبول است. بنابراین گزینه اول و دوم راهکارهای سازشی یکسان هستند.

مثال

انواع خطا	هزینه (R)	آلودگی صوتی (S)	احتمال خرابی (P)
سیستم الف	۵.۷۵۶	۴.۰۳۸	۳.۹۲۲
سیستم ب	۷.۰۳۸	۷.۲۴۴	۴.۲۴۴
سیستم ج	۸.۰۴۴	۶.۵۰۰	۵.۹۶۲
سیستم د	۳.۸۰۰	۴.۲۴۴	۲.۱۸۹
سیستم ه	۴.۲۴۴	۵.۸۵۵	۲.۷۵۶
سیستم و	۶.۳۹۳	۸.۰۰۰	۲.۷۵۹
وزن معیارها	۰.۷۶۸	۰.۸۷۸	۰.۶۵۰۰

Page • 186

ویکور خاکستری

	$C_{۱}$	$C_{۲}$	$\dots$	C_n
$A_{۱}$	$[f_{۱۱}^L, f_{۱۱}^U]$	$[f_{۱۲}^L, f_{۱۲}^U]$	$\dots$	$[f_{۱n}^L, f_{۱n}^U]$
$A_{۲}$	$[f_{۲۱}^L, f_{۲۱}^U]$	$[f_{۲۲}^L, f_{۲۲}^U]$	$\dots$	$[f_{۲n}^L, f_{۲n}^U]$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
A_m	$[f_{m۱}^L, f_{m۱}^U]$	$[f_{m۲}^L, f_{m۲}^U]$	$\dots$	$[f_{mn}^L, f_{mn}^U]$

$C_{۱}, C_{۲}, \dots, C_n$

$A_{۱}, A_{۲}, \dots, A_m$

w_j

$\otimes f_{ij}$

$\otimes f_{ij} \in [f_{ij}^L, f_{ij}^U]$

$$A^* = \{f_{۱}^*, \dots, f_n^*\} = \left\{\left(\max_i f_{ij}^U \,|\, j \in I\right) or \left(\min_i f_{ij}^L \,|\, j \in J\right)\right\} \quad j = ۱,۲,\dots,n$$

$$A^- = \{f_{۱}^-, \dots, f_n^-\} = \left\{\left(\min_i f_{ij}^L \,|\, j \in I\right) or \left(\max_i f_{ij}^U \,|\, j \in J\right)\right\} \quad j = ۱,۲,\dots,n$$

ویکور خاکستری – ادامه

$S_i \to [S_i^L, S_i^U]$

$R_i \to [R_i^L, R_i^U]$

$$S_i^L = \sum_{j\in I} w_j \left(\frac{f_j^* - f_{ij}^U}{f_j^* - f_j^-}\right) + \sum_{j\in J} w_j \left(\frac{f_{ij}^L - f_j^*}{f_j^- - f_j^*}\right) \quad i = ۱,\dots,m$$

$$S_i^U = \sum_{j\in I} w_j \left(\frac{f_j^* - f_{ij}^L}{f_j^* - f_j^-}\right) + \sum_{j\in J} w_j \left(\frac{f_{ij}^U - f_j^*}{f_j^- - f_j^*}\right) \quad i = ۱,\dots,m$$

$$R_i^L = \max\left\{ w_j \left(\frac{f_j^* - f_{ij}^U}{f_j^* - f_j^-}\right) \Big| j \in I, w_j \left(\frac{f_{ij}^L - f_j^*}{f_j^- - f_j^*}\right) \Big| j \in J \right\} \quad i = ۱,\dots,m$$

$$S^* = \min_i S_i^L, \quad S- = \max_i S_i^U$$

$$R^* = \min_i R_i^L, \quad R- = \max_i R_i^U$$

$$Q_i = [Q_i^L, Q_i^U] \quad i = ۱,۲,\dots,m$$

$$Q_i^L = v\frac{(S_i^L - S^*)}{(S^- - S^*)} + (1-v)\frac{(R_i^L - R^*)}{(R^- - R^*)}$$

$$Q_i^U = v\frac{(S_i^U - S^*)}{(S^- - S^*)} + (1-v)\frac{(R_i^U - R^*)}{(R^- - R^*)}$$

Page • 188

مثال

	C_1	C_2
A_1	[۰.۷۵ ,۱.۳۴]	[۲۷۸۴ ,۳۱۹۲]
A_2	[۱.۸۳ ,۲.۱۱]	[۳۹۷۱ ,۳۸۵۷]
A_3	[۴.۹۰ ,۵.۷۳]	[۴۴۰۹ ,۴۶۸۱]

ویکور فازی

$$\widetilde{D} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \widetilde{x}_{11} & \widetilde{x}_{12} & \dots & \widetilde{x}_{1n} \\ \widetilde{x}_{21} & \widetilde{x}_{22} & \dots & \widetilde{x}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{x}_{m1} & \widetilde{x}_{m1} & \dots & \widetilde{x}_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \quad i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{f}_j^* = \max_i \widetilde{x}_{ij} \\ \widetilde{f}_j^- = \min_i \widetilde{x}_{ij} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{S}_i = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{w}_j \left(\widetilde{f}_j^* - \widetilde{x}_{ij}\right) / \left(\widetilde{f}_j^* - \widetilde{f}_j^-\right) \\ \widetilde{R}_i = \max_j \left[\widetilde{w}_j \left(\widetilde{f}_j^* - \widetilde{x}_{ij}\right) / \left(\widetilde{f}_j^* - \widetilde{f}_j^-\right)\right] \end{array} \right\}$$

$$\widetilde{S}^* = \min_i \widetilde{S}_i,\ \widetilde{S}^- = \max_i \widetilde{S}_i$$

$$\widetilde{R}^* = \min_i \widetilde{R}_i,\ \widetilde{R}^- = \max_i \widetilde{R}_i$$

$$\widetilde{Q}_i = v\left(\widetilde{S}_i - \widetilde{S}^*\right) / \left(\widetilde{S}^- - \widetilde{S}^*\right) + (1 - v)\left(\widetilde{R}_i - \widetilde{R}^*\right) / \left(\widetilde{R}^- - \widetilde{R}^*\right)$$

مثال

	C_1	C_2
A_1	(۵، ۶، ۷، ۸)	(۵، ۷، ۸، ۱۰)
A_2	(۷، ۸، ۸، ۹)	(۸، ۹، ۱۰، ۱۰)
A_3	(۷، ۸.۷، ۹.۳، ۱۰)	(۷، ۸.۳، ۸.۷، ۱۰)

روش کوپراس

COPRAS

Complex Proportional Assessment

$$n_{ij}(C^{+}) = \frac{x_{ij}}{\max_i x_{ij}}$$

$$n_{ij}(C^{-}) = \frac{\min_i x_{ij}}{x_{ij}}$$

محاسبه ماتریس بی مقیاس وزین

ارزش شاخصهایی که هر چه بیشتر باشند مطلوب‌تر است (شاخصهای سود)
ارزش شاخصهایی که هرچه کمتر باشند مطلوب‌تر است

$$P_i = \sum_{j \in B} \hat{x}_{ij}, i = 1,2,\ldots,m \;;\quad P_i,\ i = 1,2,\ldots,m$$

$$R_i = \sum_{j \in C} \hat{x}_{ij}, i = 1,2,\ldots,m \;;\quad R_i,\ i = 1,2,\ldots,m$$

$$R_{\min} = \min_{i, i=1,2,\ldots,m} R_i$$

$$Q_i = P_i + \left(R_{\min} \sum_{i=1}^{m} R_i\right) \Big/ \left(R_i \sum_{i=1}^{m} R_{\min} / R_i\right)$$

کیو میزان اولویت گزینه‌ها

$$K = \max_{i, i=1,2,\ldots,m} Q_i$$

$$N_i = \frac{Q_i}{K} \times 100\%$$

مثال

انواع خطا	هزینه (R)	آلودگی صوتی (S)	احتمال خرابی (P)
سیستم الف	۵.۷۵۶	۴.۰۳۸	۳.۹۲۲
سیستم ب	۷.۰۳۸	۷.۲۴۴	۴.۲۴۴
سیستم ج	۸.۰۴۴	۶.۵۰۰	۵.۹۶۲
سیستم د	۳.۸۰۰	۴.۲۴۴	۲.۱۸۹
سیستم ه	۴.۲۴۴	۵.۸۵۵	۲.۷۵۶
سیستم و	۶.۳۹۳	۸.۰۰۰	۲.۷۵۹
وزن معیارها	۰.۷۶۸	۰.۸۷۸	۰.۶۵۰۰

کوپراس خاکستری

$$\otimes r_{ij} = \begin{bmatrix} [\underline{r}_{۱۱};\overline{r}_{۱۱}] & [\underline{r}_{۱۲};\overline{r}_{۱۲}] & \cdots & [\underline{r}_{۱n};\overline{r}_{۱n}] \\ [\underline{r}_{۲۱};\overline{r}_{۲۱}] & [\underline{r}_{۲۲};\overline{r}_{۲۲}] & \cdots & [\underline{r}_{۲n};\overline{r}_{۲n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{r}_{m۱};\overline{r}_{m۱}] & [\underline{r}_{m۱};\overline{r}_{m۱}] & \cdots & [\underline{r}_{mn};\overline{r}_{mn}] \end{bmatrix}$$

$$\underline{n}_{ij} = \frac{\underline{r}_{ij}}{{}^{۱}\!/_{۲}\left(\sum_{i=۱}^{m}\underline{r}_{ij} + \sum_{i=۱}^{m}\overline{r}_{ij}\right)} = \frac{۲\underline{r}_{ij}}{\sum_{i=۱}^{m}\underline{r}_{ij} + \sum_{i=۱}^{m}\overline{r}_{ij}}$$

$$\overline{n}_{ij} = \frac{\overline{r}_{ij}}{{}^{۱}\!/_{۲}\left(\sum_{i=۱}^{m}\underline{r}_{ij} + \sum_{i=۱}^{m}\overline{r}_{ij}\right)} = \frac{۲\overline{r}_{ij}}{\sum_{i=۱}^{m}\left(\underline{r}_{ij} + \overline{r}_{ij}\right)}$$

$$\otimes n_{ij} = \begin{bmatrix} [\underline{n}_{۱۱};\overline{n}_{۱۱}] & [\underline{n}_{۱۲};\overline{n}_{۱۲}] & \cdots & [\underline{n}_{۱n};\overline{n}_{۱n}] \\ [\underline{n}_{۲۱};\overline{n}_{۲۱}] & [\underline{n}_{۲۲};\overline{n}_{۲۲}] & \cdots & [\underline{n}_{۲n};\overline{n}_{۲n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{n}_{m۱};\overline{n}_{m۱}] & [\underline{n}_{m۲};\overline{n}_{m۲}] & \cdots & [\underline{n}_{mn};\overline{n}_{mn}] \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_{ij} = \underline{n}_{ij}.w_j; \quad \overline{v}_{ij} = \overline{n}_{ij}.w_j.$$

$$V = \begin{bmatrix} [\underline{v}_{۱۱};\overline{v}_{۱۱}] & [\underline{v}_{۱۲};\overline{v}_{۱۲}] & \cdots & [\underline{v}_{۱n};\overline{v}_{۱n}] \\ [\underline{v}_{۲۱};\overline{v}_{۲۱}] & [\underline{v}_{۲۲};\overline{v}_{۲۲}] & \cdots & [\underline{v}_{۲n};\overline{v}_{۲n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\underline{v}_{m۱};\overline{v}_{m۱}] & [\underline{v}_{m۱};\overline{v}_{m۱}] & \cdots & [\underline{v}_{mn};\overline{v}_{mn}] \end{bmatrix}$$

Page • 194

کوپراس خاکستری – ادامه

$$P_i = \frac{۱}{۲}\sum_{j\in B}\left(\underline{v}_{ij} + \bar{v}_{ij}\right)$$

$$R_i = \frac{۱}{۲}\sum_{j\in C}\left(\underline{v}_{ij} + \bar{v}_{ij}\right)$$

$$R_i = \min_{i,i=۱,۲,\ldots,m} R_i$$

$$Q_i = P_i + \frac{R_{\min}\sum_{j=۱}^{n} R_i}{R_i \sum_{j=۱}^{n} \frac{R_{\min}}{R_i}} \rightarrow Q_i = P_i + \frac{\sum_{j=۱}^{n} R_i}{R_i \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{R_i}}$$

$$K = \max_{i,i=۱,۲,\ldots,m} Q_i$$

$$N_i = \frac{Q_i}{Q_{\max}} \times \%۱۰۰$$

$$K = Q_{\max}$$

مثال

	$C_۱$	$C_۲$
$A_۱$	[۰.۷۵ ,۱.۲۴]	[۲۷۸۴ ,۳۱۹۲]
$A_۲$	[۱.۸۳ ,۲.۱۱]	[۳۹۷۱ ,۳۸۵۷]
$A_۳$	[۴.۹۰ ,۵.۷۳]	[۴۴۰۹ ,۴۶۸۱]

کوپراس فازی

$$D = \left[\tilde{r}_{ij}\right]$$
$$V = \left[\tilde{v}_{ij}\right]$$
$$\tilde{v}_{ij} = \frac{\tilde{r}_{ij}\tilde{w}_j}{\sum_{i=1}^{m}\tilde{r}_{ij}}, i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n$$

$$\tilde{w}_j = \sum_{i=1}^{m}\tilde{v}_{ij}, i = 1,2,\ldots,m; j = 1,2,\ldots,n,$$
$$\tilde{S}_i^+ = \sum_{j \in B}\tilde{v}_{ij}, i = 1,2,\ldots,m$$
$$\tilde{S}_i^- = \sum_{j \in C}\tilde{v}_{ij}, i = 1,2,\ldots,m$$

$$\tilde{Q}_i = \tilde{S}_i^+ + \frac{\tilde{S}_{min}^- \sum_{j=1}^{n}\tilde{S}_i^-}{\tilde{S}_i^- \sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{S}_{min}^- \middle/ \tilde{S}_i^-\right)}, i = 1,2,\ldots,m$$

$$Q_i = f_1 + \frac{\left[(f_3 - f_1) + (f_2 - f_1)\right]}{3}$$
$$N_i = \frac{Q_i}{Q_{\max}} \times 100$$

مثال

	C_1	C_2
A_1	(۵، ۶، ۷، ۸)	(۵، ۷، ۸، ۱۰)
A_2	(۷، ۸، ۸، ۹)	(۸، ۹، ۱۰، ۱۰)
A_3	(۷، ۸.۷، ۹.۳، ۱۰)	(۷، ۸.۳، ۸.۷، ۱۰)