فصل اول

"مفاهیم کلی برنامه ریزی خطی - مدل سازی و حل هندسی"

Linear Programming (LP)

عناصر اصلی در مدل سازی: 1 تابع هدف Max-Min

2 متغیر تصمیم x_i ها

3 محدودیت ها

فرم کلی مسائل برنامه ریزی خطی:

$$\max \text{ یا } \min \quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

s.t

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \cdots + a_{1n} x_n \leq \text{یا} = \text{یا} \geq b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \cdots a_{2n} x_n \leq \text{یا} = \text{یا} \geq b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \leq \text{یا} = \text{یا} \geq b_m$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ یا ≤ 0 یا آزاد در علامت

نامعید

c_j: ضریب هزینه یا سود

x_j: متغیر تصمیم

a_{ij}: ضرایب فنی یا تکنولوژی - ضریب مصرف یا تولید

b_i: منبع (موجودی) - تقاضا (نیاز مندی) ← سمت راست مسأله

مرزی دارد.

Scanned by CamScanner

مثال) شرکتی می‌تواند ۳ محصول A و B و C را تولید کند. سود هر واحد محصولات A و B و C به ترتیب ۱۰۰ و ۲۰۰ و ۲۵۰ واحد می‌باشد. برای تولید هر واحد از محصولات A و B و C به ترتیب ۲ و ۳ و ۵ نیروی انسانی نیاز هست. این در حالیست که تعداد نیروی انسانی موجود ۱۲۰۰ نفر ساعت می‌باشد. تولید هر واحد از محصولات A و B و C به ترتیب ۱ و ۳ و ۴ واحد از ماده خام برای ۸ نیاز هست (این گونه بین مناسبت که تولید هر واحد محصول A، یک واحد از ماده خام موجود را مصرف می‌کند) باتوجه به تقسیم مدیریت شرکت، مجموع تولیدات محصولات A و B حداقل باید ۱۲۰ واحد باشد. باتوجه به اینکه سازمان صنعتی آست مجموع محصولات تولیدی نمی‌تواند بیش از ۴۰۰ واحد باشد. همچنین لازم به ذکر است کل ماده خام موجود برابر ۸۰۰۰ واحد می‌باشد.

حال شرکت می‌خواهد سود شرکت خود را به حداکثر برساند. تابع هدف مسئله به چه صورت است؟

1 ✓ یک LP به جهت حداکثر کردن سود شرکت فرموله کنید.

2 ✓ اگر هدف شرکت، حداکثر کردن تعداد محصولات تولیدی باشد، تابع هدف مسئله به چه صورت است؟

1 $\max Z = 100x_1 + 200x_2 + 250x_3$

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 12000$ ← عنصر مصرف

$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 8000$

$x_1 + x_2 \ge 120$

$x_1 + x_2 + x_3 \le 400$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

2 $\max Z = x_1 + x_2 + x_3$

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 12000$

$x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 8000$

$x_1 + x_2 \ge 120$

$x_1 + x_2 + x_3 \le 400$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

$\min Z = 3x_1 + 5x_2 + 8x_3$ ← ارجحیت هزینه

$2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \ge 1000$ تابع قابلیت

2 ← عنصر در هر ۱ ساعت نفر اول ۲ صفحه تحویل می‌دهد.

هزینه تولید

Scanned by CamScanner

۱۱) "مسأله زمان‌بندی کار"

یک دفتر پست به تعدادی کارمند تمام وقت در روزهای هفته نیاز دارد. تعداد کارمندان مورد نیاز در هر روز در جدول زیر داده شده است. قاعده مشترک برای کارمندان این است که هر کدام باید پنج روز متوالی کار کرده و سپس ۲ روز بیکار باشند. مدیریت دفتر پست می‌خواهد برای رفع نیازهای روزانه خود، کارمند تمام وقت استخدام کند. مدل ۰-۱ به جهت حداقل کردن تعداد کارمندان تمام وقتی که استخدام می‌شوند فرمول بندی کنید.

روزهای هفته	تعداد کارمندان مورد نیاز
ش	۱۷
ی	۱۳
د	۱۵
س	۱۹
چ	۱۴
پ	۱۶
ج	۱۱

$$\min x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$$

$$x_1+x_4+x_5+x_6+x_7 \geq 17$$

$$x_2+x_5+x_6+x_7+x_1 \geq 13$$

$$x_1+x_2+x_3+x_6+x_7 \geq 15$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_7 \geq 19$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \geq 14$$

$$x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \geq 16$$

$$x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 \geq 11$$

Scanned by CamScanner

مثال) در هر دوره ۶ ساعته از روز، مرکز پلیس یوسف آباد نگران حداقل تعداد پلیس نیاز دارد که در جدول زیر آورده شده است. پلیس‌ها می‌توانند برای ۱۲ یا ۱۸ ساعت متوالی استخدام شوند. به پلیس‌هایی که ۱۲ ساعت متوالی کار می‌کنند ۱۰۰۰ تومان در ساعت و آن‌هایی که ۶ ساعت دیگر هم کار می‌کنند (۱۸ ساعت متوالی کار می‌کنند) برای هر ساعت اضافی ۱۵۰۰ تومان در ساعت پرداخت می‌شود. کل ۷۶ خواهد شد که برای کمینه کردن هزینه نیازهای روزانه شروع کار در این مرکز پلیس استفاده شود (بیشتر ۹۰)

دوره زمانی	تعداد پلیس مورد نیاز
۱۲ شب تا ۶ صبح	۱۲
۶ صبح تا ۱۲ ظهر	۸
۱۲ بعدازظهر تا ۶ بعدازظهر	۶
۶ بعدازظهر تا ۱۲ شب	۱۵

x_i: پلیس‌هایی که در شیفت i شروع به کار می‌کنند و 12 ساعت کار می‌کنند.

y_i: پلیس‌هایی که در شیفت i شروع به کار می‌کنند و 18 ساعت کار می‌کنند.

$$\min Z = 12000(x_1+x_2+x_3+x_4)+21000(y_1+y_2+y_3+y_4)$$

$$x_1+y_1+x_4+y_4+y_3 \geq 12$$

$$x_2+y_2+x_1+y_1+y_4 \geq 8$$

$$x_3+y_3+x_2+y_2+y_1 \geq 6$$

$$x_4+y_4+x_3+y_3+y_2 \geq 15$$

Scanned by CamScanner

۳

مثال) زمان تولید محصول (۱) نصف زمان تولید محصول (۲) و $\frac{۲}{۳}$ زمان تولید محصول (۳) است. اگر موسسه‌ای تمام زمان خود را صرف تولید محصول (۲) کند قادر به تولید حداکثر ۵۰۰ واحد از این محصول خواهد بود. محدودیتی که مسئله فوق را بیان می‌کند عبارت است از: (سیستم ۸۷)

۱) $۲x_۱ + x_۲ + ۲x_۳ \leq ۲۰۰۰$

۲) $x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ \leq ۱۵۰۰$

۳) $۲x_۱ + ۴x_۲ + ۳x_۳ \leq ۲۵۰۰$ ✓

۴) $x_۱ + ۴x_۲ + ۲x_۳ \leq ۱۵۰۰$

تست ۱ دوره‌ی ۸۶) زمان لازم برای تولید هر واحد از محصول A نیم برابر محصول B و ۲ برابر محصول C است. اگر کل زمان در دسترس نیروی انسانی در روز صرف تولید محصول B شود می‌توان ۲۰۰ واحد در روز تولید کرد. با فرض اینکه A و B و C تقاضای تولید هر یک از محصولات را نشان دهد، محدودیت معادل عبارت فوق کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}A + B + ۲C \leq ۲۰۰$

۲) $A + \frac{۱}{۲}B + ۲C \leq ۲۰۰$

۳) $A + ۲B + ۴C \leq ۱۰۰$

۴) $۲A + ۴B + C \leq ۱۰۰$ ✓

$t_A = \frac{۱}{۲} t_B$

$t_A = ۲ t_C$ $\rightarrow t_C = \frac{۱}{۴} t_B$

$\frac{۱}{۲} x_A + x_B + \frac{۱}{۴} x_C \leq ۲۰۰$

Scanned by CamScanner

نمایش ماتریسی مدل برنامه ریزی خطی:

$$\max Z = CX$$

$$AX \lesseqgtr b$$

$$x \geq 0$$

ماتریس ضرایب قیود

فرم کانونی (متعارفی) و استاندارد مسائل ماکزیمم سازی و مینیمم سازی:

فرم کانونی ماکزیمم

$$\max Z = CX$$

$$AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

فرم کانونی مینیمم

$$\min Z = CX$$

$$AX \geq b$$

$$X \geq 0$$

فرم استاندارد Max

$$\max Z = CX$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

فرم استاندارد Min

$$\min Z = CX$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

Scanned by CamScanner

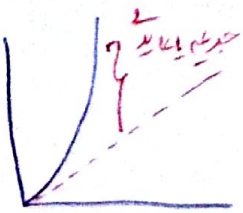
فرض های مورد نیاز تحلیل

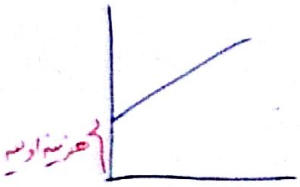
فرض هایی که برای مدل سازی یک مسئله برنامه ریزی خطی لازم است :

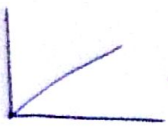
۱. تناسب ۲. جمع پذیری ۳. تقسیم پذیری ۴. قطعیت (معین بودن)

۱- فرض تناسب : استفاده بیش تر از فعالیت i ام ، هزینه بیشتری را در بر دارد. یعنی هیچ گونه صرفه جویی

تخفیف ، سود انبوه و هزینه اولیه نداریم.







۲- فرض جمع پذیری : این فرض تضمین می کند که هزینه کل برابر مجموع هزینه های فعالیت های انفرادی است و هیچ گونه صرفه جویی

محدودیت برابر مجموع سهم تک تک فعالیت های انفرادی است به میان دیگر، تاثیرات جانبی و متقابل بین فعالیت ها وجود ندارد!

نکته : دو فرض تناسب و جمع پذیری بر استقلال متغیرها از یکدیگر دلالت می کنند.

نکته : در صورتی که رابطه بین متغیرها در تابع هدف و محدودیت نیاز به جمع پذیری باشند (با فرض درجه یک بودن ، تقسیم پذیری و یا توان متغیرها یک باشد) ، متغیرها بر یکدیگر اثر متقابل دارند و فرض استقلال در مورد آن صادق نیست

نکته : در فرض جمع پذیری ، متغیرها باید عدد حقیقی باشند .

نکته: محدودیت هر LP باید نامعادله یا معادله خطی باشد

* سمت هر متغیر تصمیم در تابع هدف با مقدار متغیر تصمیم متناسب است
* " " " در سمت چپ هر محدودیت، با مقدار متغیر تصمیم متناسب است.
* " " " تابع هدف مستقل از مقدار متغیرهای تصمیم است.
* " " " در سمت چپ هر محدودیت " " " " " " " " ← یعنی مقدار سمت چپ
* هر محدودیت برابر مجموع تمام تک تک متغیرهاست

لـ این توضیحات یعنی اگر در تابع هدف و محدودیتها قدرمطلق داشته باشیم...

نکته: دو فرض خطی بودن را

۳- فرض تقسیم پذیری (پیوستگی): یعنی متغیرها در بازه‌ی مشخص مقادیر پیوسته اختیار کنند.

$x \geq 0$ ✓ $\quad x \in int$ ✗ $\quad |x| \geq 4 \rightarrow x \geq 4$ ✗ $\quad x \leq -4$

$x \in [2,5]$ ✓ $\quad x \in [2,5] \cup [6,8]$ ✗

۴- فرض قطعیت (یقین بودن): پارامترهای A و B و C پارامترها ثابت و مشخص و معینی هستند.

Scanned by CamScanner

تبدیلات مقدماتی - (روش‌های دستکاری مساله) :

۱) تبدیل تابع هدف ماکزیمم به مینیمم و بالعکس

۲) تغییر جهت نامساوی

۳) تبدیل نامساوی به مساوی و بالعکس

۴) معدوم کردن متغیرهای نامعتبر (آزاد در علامت)

۵) حذف تبدیل‌های از محدودیت‌ها و تابع هدف

۶) توابع برش $\min(\max) \rightarrow \max(\min)$

۱. تبدیل تابع هدف ماکزیمم به مینیمم و بالعکس:

$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$

$\max(-Z) = -(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n)$

(مقدار تابع هدف تغییر نمی‌کند / نقاط بهینه یکسان می‌شوند)

← تفاوت متغیر اول و دوم: متغیر اول روی محور مختصات / متغیر دوم مقدار تابع هدف را نشان می‌دهد

۲. تغییر جهت نامساوی: دو متغیر مازاد کم کنیم

۳. تبدیل نامساوی به مساوی و بالعکس:

۳.۱: تبدیل نامساوی به مساوی:

$\leq 2x_1 + x_2 \leq 1000$

$\rightarrow 2x_1 + x_2 + S = 1000$

$\geq 2x_1 + x_2 \geq 1000$

$\rightarrow 2x_1 + x_2 - S = 1000$

Scanned by CamScanner

مثال) می خواهیم در هر دوره ۶ ساعته از روز، مرکز پلیس یوسف آباد کنترل حوادث به تعدادی پلیس نیاز دارد که در جدول زیر آورده شده است. پلیس‌ها می‌توانند برای ۱۲ یا ۱۸ ساعت متوالی استخدام شوند. به پلیس‌هایی که ۱۲ ساعت متوالی کار می‌کنند ۱۰۰۰ تومان در ساعت و آن‌هایی که ۱۸ ساعت کار می‌کنند (۱۸ ساعت متوالی کار می‌کنند) برای هر ساعت اضافی ۱۵۰۰ تومان در ساعت پرداخت می‌شود. یک مدل فرموله کنید که برای کمینه کردن هزینه نیازهای روزانه شیفت کار در این مرکز پلیس استفاده شود. (بستر ۹۰)

دوره زمانی	تعداد پلیس مورد نیاز
۱۲ شب تا ۶ صبح	۱۲
۶ صبح تا ۱۲ ظهر	۸
۱۲ تا ۶ بعدازظهر	۶
۶ بعدازظهر تا ۱۲ شب	۱۵

x_i: پلیس‌هایی که در شیفت i شروع به کار می‌کنند و ۱۲ ساعت کار می‌کنند.

y_i: پلیس‌هایی که در شیفت i شروع به کار می‌کنند و ۱۸ ساعت کار می‌کنند.

$$\min Z = 12000(x_1+x_2+x_3+x_4) + 21000(y_1+y_2+y_3+y_4)$$

$$x_1 + y_1 + x_4 + y_4 + y_3 \geq 12$$

$$x_2 + y_2 + x_1 + y_1 + y_4 \geq 8$$

$$x_3 + y_3 + x_2 + y_2 + y_1 \geq 6$$

$$x_4 + y_4 + x_3 + y_3 + y_2 \geq 15$$

Scanned by CamScanner

۳-۲. تبدیل معادلی به نامعادلی:

$$2x_1 + x_2 = 10 \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \end{cases}$$

نکته: محدودیت‌ها هرچقدر کمتر باشند حل مسأله راحت‌تر است هرچند تعداد محدودیت‌ها افزایش یابد زمان حل مسأله افزایش پیدا می‌کند.

مثال: یک کارخانه سیمان ۸۲۵ تن سیمان ۱۸ تن ۴۸ و ۱۸ تن ۵۸ و ضایعات ۵۵۰ تن تولید می‌کند. اگر قیمت هر تن سیمان ۲ واحد پول باشد درآمد کارخانه چقدر است؟

یک مسأله برنامه‌ریزی خطی دارای ۱۰ متغیر تصمیم و ۱۰ محدودیت است. تعداد متغیرها و تعداد محدودیت‌ها را بنویسید.

الف) تعداد متغیرها ۱۰۰ و تعداد محدودیت‌ها ۱۰

ب) تعداد متغیرها ۱۰ و تعداد محدودیت‌ها ۱۰۰

ج) تعداد متغیرها ۱۰ و تعداد محدودیت‌ها ۱۰

د) هیچ‌کدام

۱۲- مقید کردن متغیرهای نامقید (آزاد در علامت) $\rightarrow$ x_1 را به y و z تبدیل کنید.

مقید کردن یعنی: وقتی متغیر یا تابع مقید هست، $x \geq 0$ باشد.

اگر بخواهد متغیر نامقید مدل Simplex را حل کند باید دو متغیر جدید اضافه کرد.

$x \geq 2$
$x \leq 2$
$x \leq 0$

روش اول) اگر $x_j \geq l_j$ یا $x_j \leq u_j$ باشد:

$$x_j \geq L_j \rightarrow x_j - L_j \geq 0 \rightarrow x' \geq 0$$

$$x_j \leq u_j \rightarrow u_j - x_j \geq 0 \rightarrow x'' \geq 0$$

Scanned by CamScanner

** اگر x_j باشد: $x_j \leq u_j$

* اگر x_j باشد: $x_j \geq l_j$

روش متداول و اصلی برای حذف کردن متغیرهای نامحدود:

$x_j = x'_j - x''_j$

$x'_j, x''_j \geq 0$

* توجه بسیار مهم: توجه کنید x'_j و x''_j یعنی جداشدنی‌اند و متغیر x_j می‌تواند مقدار منفی بگیرد.

* توجه بسیار مهم: لطفاً به حالتی که محدودیت‌ها و تابع هدف شامل تمام حالات می‌باشند در قسمت بعدی توجه بشود.

(برای حذف کردن متغیرها)

مثال:

$\max Z = 3x_1 + 5x_2$

$x_1 - x_2 \leq 4$

$-2x_1 + x_2 \leq 8$

$\max Z = 3(x'_1 - x''_1) + 5(x'_2 - x''_2)$

$(x'_1 - x''_1) - (x'_2 - x''_2) \leq 4$

$-2(x'_1 - x''_1) + (x'_2 - x''_2) \leq 8$

$x'_1, x''_1, x'_2, x''_2 \geq 0$

Scanned by CamScanner

روش دیگر برای حذف کردن متغیرها:

$$x_1 = x_1' - x_1''$$
$$x_2 = x_2' - x_2''$$
$$x_3 = x_3' - x_3''$$
$$\vdots$$
$$x_k = x_k' - x_k''$$

در این حالت k متغیر اضافه شده است

$$x_1 = x_1^+ - M$$
$$x_2 = x_2^+ - M$$
$$\vdots$$
$$x_k = x_k^+ - M$$

یک متغیر M اضافه شده است.

$x_k', x_k'' \geq 0$

ارتباط این دو:

$$\begin{cases} M = \max\{x_j''\} \\ x_j^+ = x_j' + M - x_j'' \end{cases}$$

این شیوه در داده‌های حجیمی از نظر اجرای عددی به دقت بیشتری نیاز دارد.

نکته: اگر یک متغیر نامحدود باشد باید خلاف صفر در یک معادله وجود داشته باشد. آن متغیر را حساب سایر متغیرها و نامحدودیت ساده به دست آورده و در سایر محدودیت‌ها قرار می‌دهیم و مسأله را با یک متغیر و محدودیت کمتر حل می‌کنیم.

$x_1 + 2x_2 \leq 10 \rightarrow 2 - x_2 + 2x_2 \leq 10 \rightarrow x_2 \leq 8$

$x_1 + x_2 = 2 \rightarrow x_1 = 2 - x_2$

$x_2 \geq 0 \rightarrow x \geq 0$

Scanned by CamScanner

۵. حذف قدرمطلق از محدودیت ها و تابع هدف :

۵-۱. حذف قدرمطلق از محدودیت‌ها:

۵-۱-۱. حذف قدرمطلق از محدودیتهای نوع نامساوی $\leq$.

$$|x_1 - 2x_2| \leq 10 \begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 10 \\ x_1 - 2x_2 \geq -10 \end{cases}$$

۵-۱-۲. حذف قدرمطلق از محدودیتهای نوع نامساوی $\geq$.

$$|x_1 - 2x_2| \geq 10 \begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 10 \\ x_1 - 2x_2 \leq -10 \end{cases}$$

مسأله MP به LP تبدیل می‌شود

۵-۲. حذف قدرمطلق از تابع هدف :

روش اول: بر مبنای جایگزین متغیرهای نامثبت: اگر $|x_j|$ در تابع هدف حضور داشته باشد:

$$|x_j| = x'_j + x''_j$$

جمع دو متغیر نامنفی

مثال: تست صنایع ۸۹. فرم خطی مسأله زیر کدام است.

$$\max z = |3x_1 - 5x_2| \longrightarrow \max z = |y| \longrightarrow y = 3x_1 - 5x_2$$

y

$$\max z = y_1 + y_2$$

$$y_1 - y_2 = 3x_1 - 5x_2$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

روش دوم: بدون تغییر است:

اگر هم تابع هدف و هم در محدودیت‌ها، قدر مطلق وجود داشته باشد:

مثال) فرم کانونی ماکزیمم سازی را برای مسأله زیر بنویسید.

$$\min z = 2x_1 + |x_2|$$

$$3x_1 + x_2 \geq 7$$

$$|2x_1 + x_2| \leq 4$$

$$x_1 \geq 0$$

$$\max -Z = -2x_1 - (x_2' + x_2'')$$

$$3x_1 + (x_2' - x_2'') \geq 7$$

$$2x_1 + (x_2' - x_2'') \leq 4$$

$$2x_1 - (x_2' - x_2'') \geq -4$$

$$x_1, x_2', x_2'' \geq 0$$

به طور خلاصه می‌توان نوشت:

- تابع هدف
- محدودیت
  - با حضور قدر مطلق ← با استفاده از قدر مطلق به شکل $x_j = x_j' - x_j''$
  - بدون حضور قدر مطلق ← بدون حضور قدر مطلق
- به کار بردن متغیرها امتیاز

- تابع هدف
  - با حضور قدر مطلق ← $x_j = x_j' + x_j''$
  - بدون حضور قدر مطلق ← $x_j = x_j' - x_j''$

Scanned by CamScanner

حذف قدر مطلق از تابع هدف:

روش دوم:

اگر مسئله اصلی ما فرم Min باشد:

$\min z = y$
$|3x_1 - 5x_2| \le y$
$y \ge 0$

$\rightarrow$

$\min z = y$
$3x_1 - 5x_2 \le y$
$3x_1 - 5x_2 \ge -y$
$y \ge 0$

اگر مسئله اصلی ما فرم max باشد:

$\max z = y$
$|3x_1 - 5x_2| \ge y$
$y \ge 0$

$\rightarrow$

$\max z = y$
$3x_1 - 5x_2 \ge y$
$3x_1 - 5x_2 \le -y$
$y \ge 0$

نکته: روش دوم همه مسائل Min سازی جواب درست می دهد. در مسائل Max سازی فرم ILP تبدیل میشه!!

قابل توجه... روش دوم:

* روش دوم نیز در مسائله Min سازی جواب درست می دهد.

$\min z = |3x_1 - 5x_2| \rightarrow \min z = 3x_4 - 5x_2 + 2y$

$3x_1 - 5x_2 + y \ge 0$ (7, 0)

$y \ge 0$ (-10, 10)

روش اول دو متغیر و یک محدودیت اضافه می کند

روش دوم یک متغیر و دو محدودیت اضافه می کند

روش سوم یک متغیر و یک محدودیت اضافه می کند

روش اول ← برای Min و Max جواب میده

روش دوم ← برای Min جواب میده ← برای Max جواب نمیده

روش سوم ← برای Min جواب میده

Scanned by CamScanner

۴- توابع مرتب : min (max) ; max (min)

کاربرد max (min) در مدل سازی : مسائل موجار

مثال) محصولی از ۲ قطعه A ، B تشکیل شده است. اگر هزینه ساخت محصول برابر max ماشین (x_A, x_B) باشد تابع هزینه مسئله به چه صورت است؟

محصولی از ۳ قطعه A ، B و C تشکیل شده است. اگر هزینه ساخت محصول برابر x_A ، x_B ، x_C باشد و ۳ قطعه A ، ۳ قطعه B و ۵ قطعه C باید وجود داشته باشد تا محصول تکمیل باشد و هزینه ساخت محصول تکمیل برابر مینیمم میزان تولید قطعات A و B و C باشد و هدف حداکثر کردن هزینه ساخت محصول تکمیل باشد تابع هدف مسئله به چه صورت است؟

۱) $\max \min (۲x_A + ۳x_B + ۵x_C)$

۲) $\max \min (۲x_A , ۳x_B , ۵x_C)$

۳) $\max \min \left(\frac{x_A}{۲} + \frac{x_B}{۳} + \frac{x_C}{۵} \right)$

۴) $\max \min \left(\frac{x_A}{۲} , \frac{x_B}{۳} , \frac{x_C}{۵} \right)$

Scanned by CamScanner

کاربرد min (max) در مدل‌سازی: مینیمم حداقل چند تابع خطی / حداقل چند عبارت قدرمطلقی خطی

خطی کردن توابع زیر:

$$\max\left(\overbrace{\min(2x_1+x_2,\ x_1-x_2)}^{y}\right)=\max y$$

$$\max y$$
$$y\le 2x_1+x_2$$
$$y\le x_1-x_2$$

$$\min(\max(x_1+3x_2,\ x_1-6x_2))$$

$$\min y$$
$$y\ge x_1+3x_2$$
$$y\ge x_1-6x_2$$

$$\min(\max(|x_1+3x_2|,\ x_1+x_2))$$

$$\min y$$
$$y\ge |x_1+3x_2| \longrightarrow x_1+3x_2\le y$$
$$x_1+3x_2\ge -y$$
$$y\ge x_1+x_2$$

$$\max(\min(|x_1+2x_2|,\ x_1-2x_2))$$

$$\max y$$
$$y\le |x_1+2x_2| \longrightarrow x_1+2x_2\ge y$$
$$x_1+2x_2\le -y$$
$$y\le x_1-2x_2$$

Scanned by CamScanner

تعاریف مقدماتی:

← جواب مسئله: هر نقطه که در تمامی معادلات و نامعادلات مسئله صدق کند جواب مسئله است

← جواب شدنی مسئله: هر نقطه که در تمامی معادلات و نامعادلات مسئله صدق کند و همچنین شرط $x \geq 0$ (اگر آن x) صدق کند جواب شدنی مسئله است

← ناحیه موجه یا فضای جواب = مجموعه‌ای از نقاط که در تمامی معادلات و نامعادلات صدق کند و همچنین شرط $x \geq 0$ را

← محدودیت زائد: محدودیتی که حذف یا عدم حذف آن تأثیری در ناحیه شدنی ندارد

← محدودیت مؤثر: محدودیتی که حذف یا عدم حذف آن در ناحیه شدنی تأثیر دارد

← محدودیت مساوی یا تساوی: محدودیتی که در نقطه بهینه

مجموعه محدب: مجموعه‌ای که هر پاره‌خط که دو نقطه از آن مجموعه را به هم وصل می‌کند، کاملاً در آن مجموعه قرار گیرد.

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x_1 \leq 5$$

$$x \geq 0$$

Scanned by CamScanner

← جواب بهینه مسئله دستگاه $\min Z = Cx$ را در نظر بگیرید x^* را نقطه بهینه صناعی می‌نامیم اگر نسبت به ناحیه موجه کمترین

داشته باشد یعنی نقطه‌ای که مقدار تابع هدف را کمتر کند

$\min: \forall x \in S \quad Cx^* \leq Cx$ $\quad \max: \forall x \in S \quad Cx^* \geq Cx$

روش‌های حل (روش‌هایی برای کردن جواب بهینه زمانی که تابع تبدیل ناحیه را تشکیل نمی‌دهد)

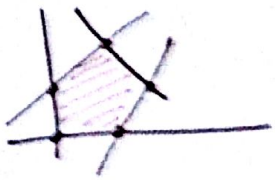
۱. امتحان کردن نقاط گوشه‌ای

۲. مرتب کردن تابع هدف روی ناحیه سازی

۳. رسم بردار تراویان محدودیت‌های تشکیل‌دهنده در نقاط داخلی

روش اول: امتحان کردن نقاط گوشه‌ای:

قضیه: اگر نقطه بهینه موجود باشد در صورت وجود نقطه بهینه یا یکی (گوشه‌ای) نقطه‌ای یا گوشه‌ای بهینه هم موجود است.



مثال:

$$\min z = -x_1 - 10x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$x \geq 0$$

$O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow Z = 0$

$A \begin{vmatrix} 0 \\ 4 \end{vmatrix} \rightarrow Z = -40$

$B \begin{vmatrix} 2 \\ 6 \end{vmatrix} \rightarrow Z = -62$ ✓ بهینه

$C \begin{vmatrix} 7 \\ 1 \end{vmatrix} \rightarrow Z = -17$

$D \begin{vmatrix} 6 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow Z = -6$

Scanned by CamScanner

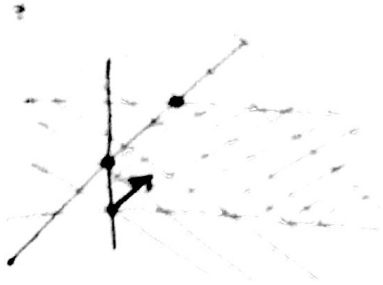
-160

$$\max z = 3x_1 + 5x_2$$

$$-x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_2 \le 4$$

$$x \ge 0$$



$O/_0^0 \rightarrow z=0$

$A/_4^0 \rightarrow z=20$ → این بیشترین مقدار است

$B/_6^2 \rightarrow z=36$

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 8$$

$$-x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_1 - x_2 \le 4$$

$$x \ge 0$$

$O/_0^0 \rightarrow z=0$

$A/_4^0 \rightarrow z=4$

$B/_0^2 \rightarrow z=8$

$C/_1^7 \rightarrow z=8$ $\quad D/_0^6 \rightarrow z=6$

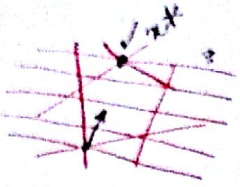
بیشترین مقدار

نتایج این سوال نشان می‌دهد که این روش ایرادات زیادی دارد ① بررسی تعداد زیاد نقاط گوشه‌ای

② اگر نقطه بهینه وجود نداشته باشد

③ جواب بهینه غیر گوشه‌ای را نمی‌توان پیدا کرد.

Scanned by CamScanner



روش دوم: حرکت تابع هدف روی ناحیه شدنی:

✓ بردار c و تابع هدف عمود بر آن را رسم می‌کنیم.

✓✓ در مسئله Min سازی: تابع هدف را در خلاف جهت بردار c و

در مسئله max سازی تابع هدف را در جهت راستای بردار c روی ناحیه شدنی حرکت می‌دهیم.

✓✓✓ آخرین جایی که تابع هدف ناحیه شدنی را ترک می‌کند نقطه بهینه مسئله می‌باشد.

نکته: حل گرافیکی مسائل با فرم برنامه‌ریزی خطی (کاب - داگلاس - غیرخطی) باشد نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

دقت: دلیلی ندارد ناحیه مسئله ما فرم برنامه‌ریزی خطی (کاب - داگلاس - غیرخطی) باشد نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

علت درستی این روش:

$$\max z = cx \qquad \nabla z = c$$

* گرادیان هر وابسته در هر نقطه بر خود آن وابسته عمود است (روی نقطه) !!!

بنابراین چون c گرادیان تابع هدف است، c بر تابع هدف عمود است.

* حرکت تابع در جهت بردار گرادیان خود، بیشترین افزایش و حرکت تابع در خلاف جهت بردار گرادیان خود، بیشترین کاهش را دارد.

Scanned by CamScanner

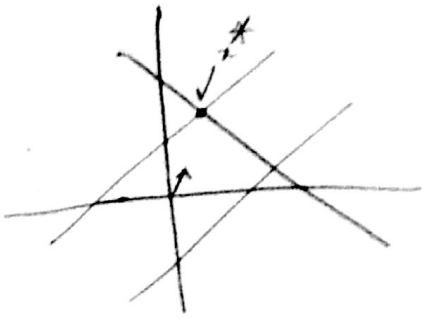
$$\max z = x_1 + 5x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 8$$

$$-x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_1 - x_2 \le 4$$

$$x \ge 0$$



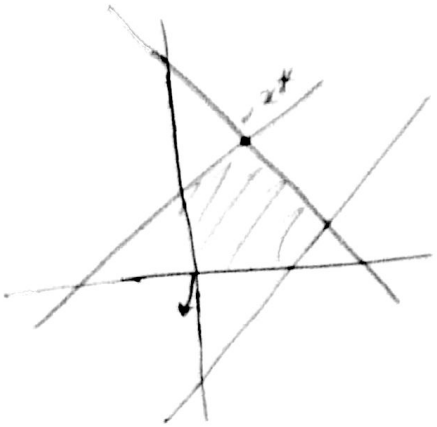
$$\min z = -x_1 - 10x_2$$

$$-x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_1 + x_2 \le 8$$

$$x_1 - x_2 \le 4$$

$$x \ge 0$$



حالت ۲: دستگاه معادلات خطی و نامعادلات خطی پاسخ ندارد

یا یک جواب دارد

یا بی شمار جواب دارد

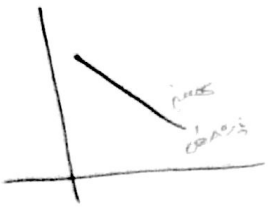
$$\max z = x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 8$$

$$-x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_1 - x_2 \le 4$$

$$x \ge 0$$



حالت ۳: یک مسأله یا جواب بهینه ندارد

یا یک جواب بهینه دارد

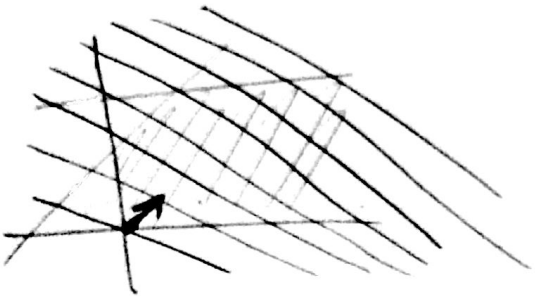
یا بی شمار جواب بهینه دارد؛ آنچه از یک مسأله بهینه داشته باشد یا بی شمار جواب بهینه دارد

$$\max z = 4x_1 + 5x_2$$

$$-x_1 + x_2 \le 4$$

$$x_2 \le 4$$

$$x \ge 0$$



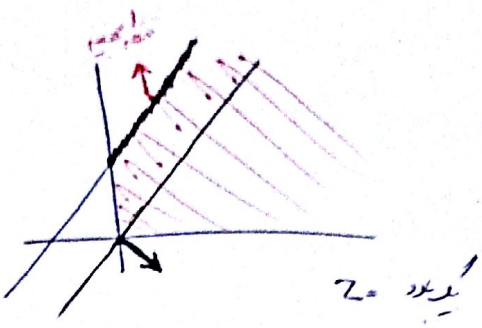
Scanned by CamScanner

۱۲

$$\min z = +x_1 - 2x_2$$

$$-x_1 + 2x_2 \le 10$$

$$x \ge 0$$



$z=0$ گیریم

و به همین ترتیب بقیه را هم

روش سوم: رسم بردار گرادیان محدودیت های گذرنده از نقاط رأسی:

بردار گرادیان محدودیت های گذرنده از نقاط رأسی را رسم می کنیم و خطوط عمود بر آن را موازی آن رسم می کنیم در جهت خلاف فضای ناحیه.

قبول محدودیت مربوطه کشید در مسأله Min سازی بردار $-c$ و در مسأله Max سازی بردار c را روی نقاط رأسی می گیریم.

جاهایی که در مسأله Min سازی بردار $-c$ و در مسأله Max سازی بردار c در هر دو طاعن تر گیرد نقطه بهینه می شود.

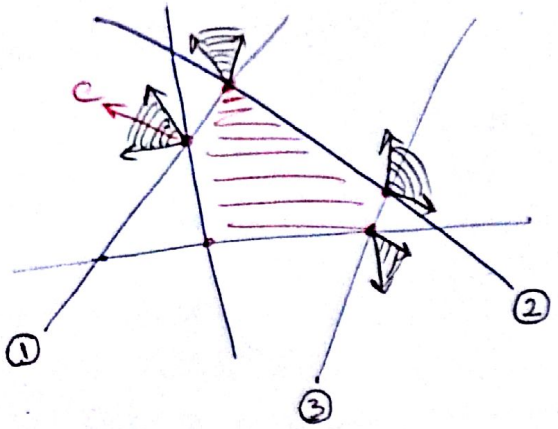
$$\max z = -2x_1 + x_2$$

$$① \quad -x_1 + 2x_2 \le 10$$

$$② \quad x_1 + x_2 \le 4$$

$$③ \quad x_1 - x_2 \le 0$$

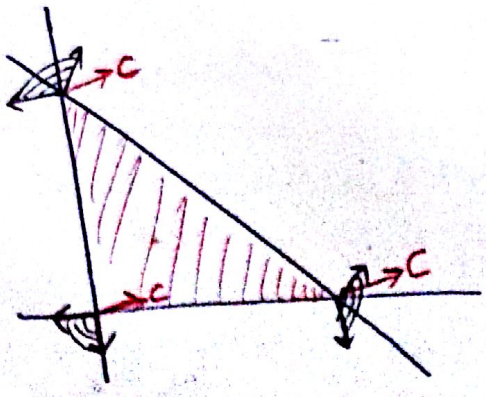
$$x \ge 0$$



$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 8$$

$$x \ge 0$$

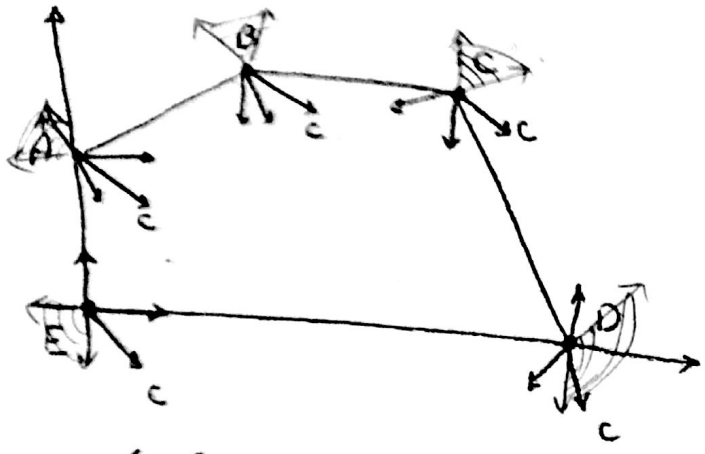


Scanned by CamScanner

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$x_1 + x_2 \le 8$$
$$x \ge 0$$

$$\min z = 2x_1 - x_2$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 9$$
$$x_1 - x_2 \le 0$$
$$x \ge 0$$

تست سیستم ۹۰. در شکل زیر، کدام یا پاسخ نقطه بهینه سیستم محدودیت‌های است؟



B (۲) A (۱)

D (۴) ✓ C (۳)

E (۵)

تست صنایع - صنایع ۹۰. در سیستم زیر، در نقطه بهینه، کدام یک از محدودیت‌ها اضافی است؟

$$\max z = x_1 + x_2$$

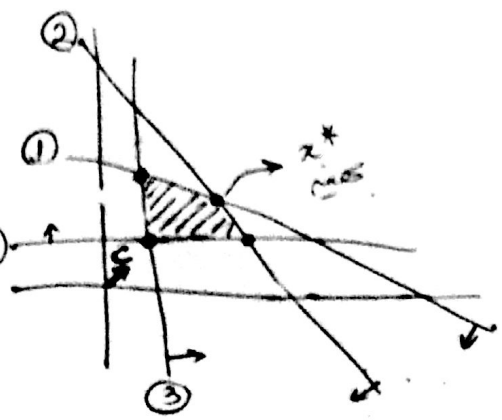
① $x_1 + 2x_2 \le 9$

② $2x_1 + x_2 \le 8$

③ $-x_1 \le -1$

④ $-x_2 \le -1$

$x \ge 0$



مثال، واقع می‌شود

۱) ۱، ۲ ✓

۲) ۱، ۳

۳) ۲، ۴

۴) ۳، ۴

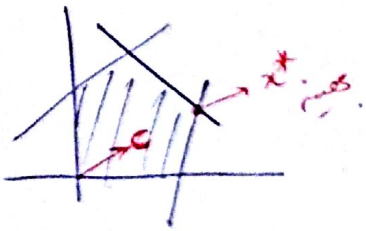
Scanned by CamScanner

بررسی انواع حالتهای جواب جمعه مسائل برنامه ریزی خطی با روش هندسی:

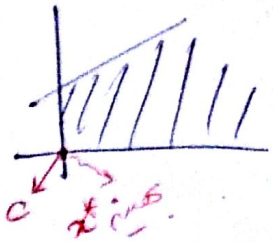
۱. جواب بهینه منحصر به فرد شدنی
۲. جواب بهینه متعدد
۳. جواب بهینه بی‌کران ناحیه شدنی تهی
۴. شدنی - نامتناهی - ناحیه شدنی تهی

۱- جواب بهینه منحصر به فرد شدنی ⟸
① ② ③ ④ ⟸ مقدار تابع هدف

۱-۱. ناحیه شدنی کراندار باشد:



۱-۲. ناحیه شدنی بی‌کران باشد:



نکات مربوط با این جواب:
1 مجموعه (جواب) نقاط بهینه یک مجموعه‌ی محدب است.
2 جواب بهینه در نقطه‌ای گوشه‌ای رخ می‌دهد.

Scanned by CamScanner

۲- جواب بهینه نامتناهی: نقطه بهینه نداریم

(۱)

$Z = t \to \infty$

نکات مربوط به این نوع جواب: ۱- مجموعه موجه محدب است

۲- شرط لازم برای جواب بهینه نامتناهی وجود ناحیه موجه نامحدود است

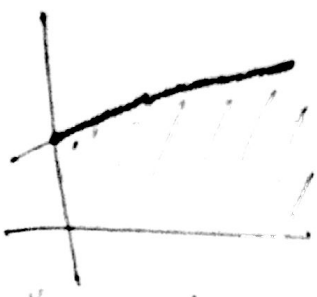
۳- در مسائل خطی، وجود ناحیه موجه نامتناهی منجر حتماً مدل سازی

۳- جواب بهینه چندگانه متناهی - جواب بهینه دگرین

(۱) (۲) (۳) (۴)

۳-۱- زمانی که ناحیه شدنی کرانه دار باشد:

۳-۲- زمانی که ناحیه شدنی بی کران باشد:



Scanned by CamScanner

نکات مربوط به این نوع جواب:

یک مسأله برنامه‌ریزی خطی یا جواب بهینه ندارد یا یک جواب بهینه دارد یا بیش از یک جواب بهینه داشته باشد به شمار جواب بهینه دارد.

۴- نشدنی - نامحدود - ناحیه نشدنی تهی - ناسازگار

به نکات تکمیلی زیر توجه کنید:

۱) اگر Z متناهی باشد، فضای موجه کران است ولی ضرورتی ندارد که کران‌دار باشد.

۲) اگر Z نامتناهی باشد، فضای موجه حتماً کران است.

۳) اگر فضای نشدنی LP کران‌دار باشد مقدار تابع هدف حتماً متناهی است.

۴) اگر فضای نشدنی LP بی‌کران باشد مقدار تابع هدف می‌تواند متناهی باشد.

Scanned by CamScanner

نکته صنایع ۸۱ . درمورد موجه بودن و هزینه کاهنده مسئله زیر چه می‌توان گفت :

$\min Z = x_1$

$x_1 > 0$

موجه هست

جواب بهینه ندارد.

تمرین ۸۱ ، ۸۳ ، ۸۵ و صنایع ۸۵

1) $\max Z = cx$

$Ax \leq b \quad , \quad b \geq 0$

$x \geq 0$

این دستگاه همواره موجه است
زیرا $x = 0$ همواره یک جواب موجه است
و از طرفی چون تابع هدف کران بالا دارد
حتماً جواب بهینه دارد.

2) $\max Z = cx$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

این دستگاه ممکن است موجه باشد
همچنین ممکن است ناموجه باشد

Scanned by CamScanner

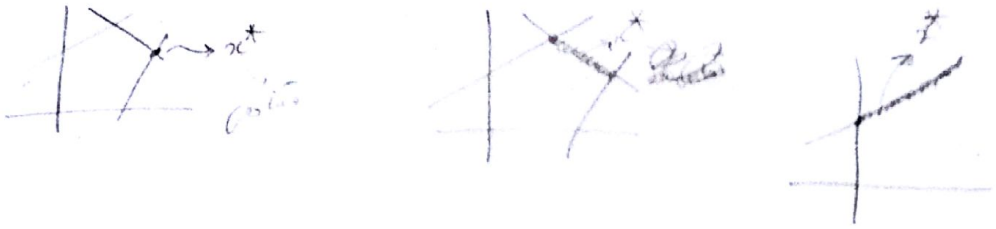
قضیه صفحه ۸۴ . اگر در بهینگی مقدار تابع هدف متناهی شود آنگاه :

ب) تمام مقادیر x^* متناهی است

ج) منطقه موجه حتماً پی‌کران است

الف) ناحیه شدنی حتماً متناهی است

د) x^* می‌تواند دارای مقادیر نامحدود باشد ✓



مثال : مسائل زیر را در نظر بگیرید و در مورد موجه بودن و جواب بهینه آن صحبت کنید.

$$\max Z = cx$$

$$Ax \leq b \quad , b \geq 0$$

$$x \geq 0$$

اگر $b=0$ باشد آنگاه چون $x=0$ در مسأله صدق می‌کند آنگاه شدنی می‌شود .

پس این مسأله می‌تواند شدنی باشد و می‌تواند شدنی نباشد.

$Ax \geq b \quad , b \geq 0$ → حتماً شدنی است

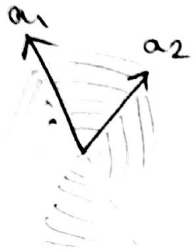
$x \geq 0$ چون $x=0$, $b=0$ را در نظر بگیرید

$Ax \geq b \quad b \geq 0$ → می‌تواند شدنی باشد

$x \geq 0$ و همچنین می‌تواند شدنی نباشد

Scanned by CamScanner

فضای ایجاب (فضای احتیاج) : [illegible]



ترکیب خطی $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = b$

↳ بردار b را به صورت ترکیب خطی بردارهای a_1 تا a_n نوشته‌ایم آن‌گاه

ترکیب خطی نامنفی بردار b را به صورت ترکیب خطی با ضرایب نامنفی بردارهای a_1 تا a_n نوشته‌ایم آن‌گاه

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = b$$
$$\lambda \geq 0$$

بردارهای a_1 و a_2 و ... و a_n را مستقل خطی می‌نامیم. در این صورت مجموعه بردارهای a_1 و ... و a_n می‌باشد.

مجموعه b حاصل از بردارهای a_1 و ... و a_n می‌باشد. $S = \{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \mid x \geq 0\}$

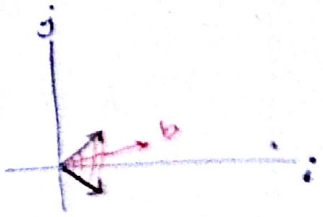
Ex.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq b_1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &\leq b_2 \end{aligned} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

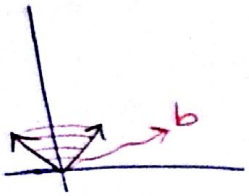
بررسی شدنی بودن دستگاه $Ax=b$ ، $x \geq 0$ با استفاده از قضایای ایجاب : (معادلات)

دستگاه فوق شدنی است اگر و فقط اگر بردار b را بتوان به صورت ترکیب خطی نامنفی ستون‌های ماتریس A نوشت و در واقع بردار b در داخل مخروط حاصل از بردارهای a_1 تا a_n قرار گیرد.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0.5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

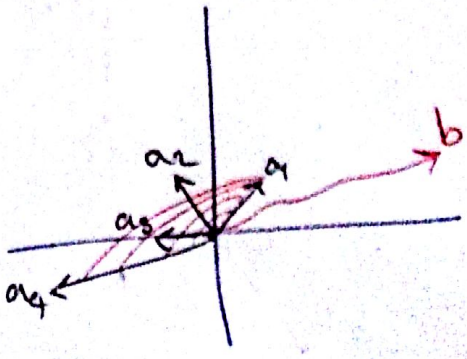


$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0.5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} x_4 = \begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix}$$



Scanned by CamScanner

بررسی سندی بودن نامعادلات

① $Ax \leq b$ ، $x \geq 0$

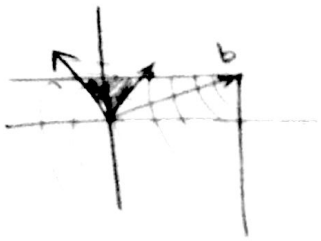
② $Ax \geq b$ ، $x \geq 0$ با استفاده از قضایای زیر

دستگاه ۱ سندی است اگر و تنها اگر ترکیب خطی ستون‌های A بردارهای چپ با مساوی b را تولید کند

$x_1 - x_2 \leq 10$

$x_1 + x_2 \leq 0$

$x \geq 0$



سندی جواب اشتراک دارند

$x_1 - x_2 \leq 10$

$x_1 + x_2 \geq 0$

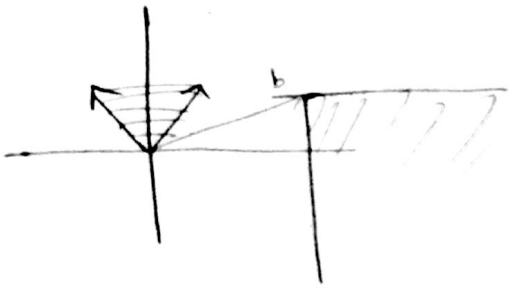
$x \geq 0$

سندی جواب اشتراک دارند

$x_1 - x_2 \geq 10$

$x_1 + x_2 \leq 0$

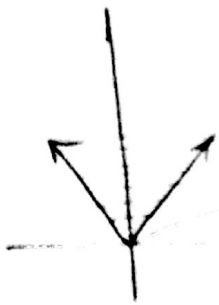
$x \geq 0$



$x_1 - x_2 \geq 10$

$x_1 + x_2 \geq 0$

$x \geq 0$

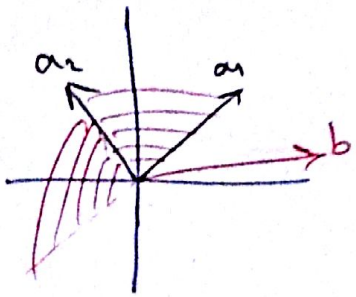


این قسمت اشتراک دارند پس مسأله سندی است

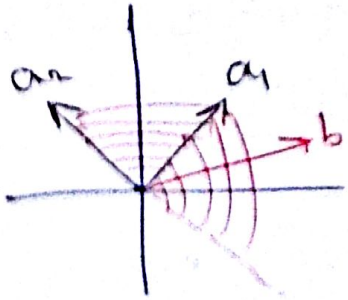
Scanned by CamScanner

بررسی شدنی بودن $Ax \leq b$ و $Ax = b$ و حتی xها لزوماً مثبت نباشند:

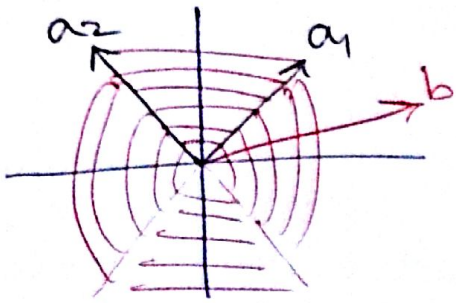
$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 \leq 0$$
$$x_2 \geq 0$$



$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 \leq 0$$
$$x_1 \geq 0$$

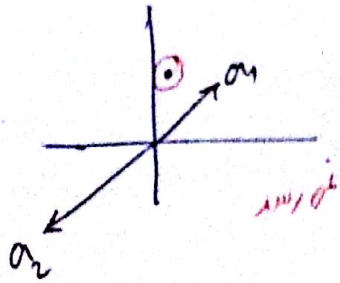


$$x_1 - x_2 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 \leq 0$$



سئوال: آیا می‌توان گفت $Ax = b$ همواره شدنی است؟ خیر

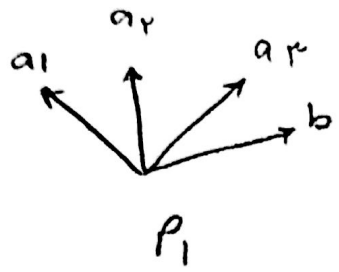
بدون قید

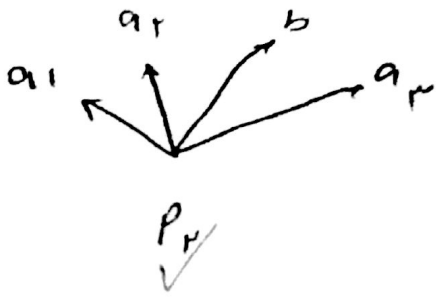


بردار a_1 و a_2 به طرق مختلف می‌توانند

Scanned by CamScanner

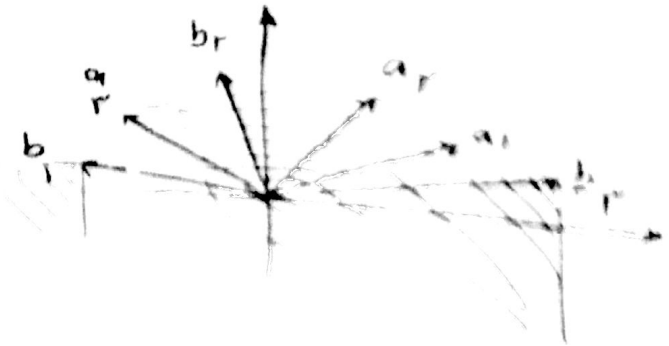
صنایع ۸۱: فضای ایجاب ۲ دستگاه معادله زیر را در نظر بگیرید. کدام بسته است؟ (x₁, x₂ ≥ 0)





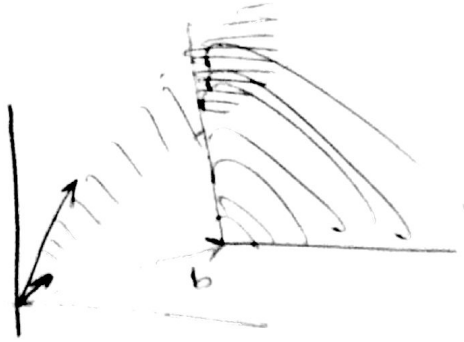
صنایع ۸۲: فضای بسته ایجاب مساله زیر را در نظر بگیرید. بدازای کدام مقادیر b، مساله بسته است.

$$X = \{ x \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \ \& \ x \geq 0 \}$$



b_2 و b_3 بسته است

مثال:



بدون استفاده از متغیرهای کمکی

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 2$$
$$x \geq 0$$

بدون استفاده از متغیرهای کمکی:

$$x_1 + x_2 - s_1 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 - s_2 = 2$$
$$x \geq 0$$

شکل دو بعدی هم ابر b تعریف شده ← بود یا نبودن آن خود نشدنی

Scanned by CamScanner

با استفاده از متغیر کمکی .

۲۵

۲

نکته : بعد فضای ایجاب به تعداد محدودیت‌های مساله بستگی دارد. درحالی که بعد فضای موجه به تعداد متغیرهای مساله بستگی دارد.

پیدا کردن جواب پایه با استفاده از فضای ایجاب

مثال صفحه ۳۰ بازارا .

$$\min z = -2x_1 - 3x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 2$$

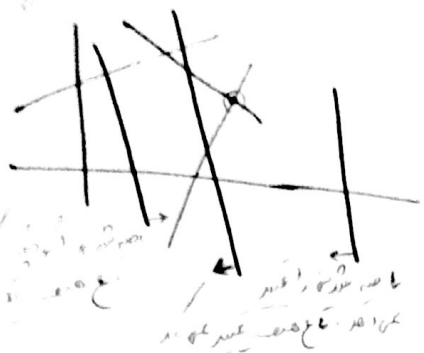
$$x \geq 0$$

اگر مساله اصلی به فرم ماکزیمم بود ؟

۲

نکته : اگر بخواهیم از فضای ایجاب برای پیدا کردن جواب پایه استفاده کنیم بعد فضای ایجاب مساله از n تا $n+m$ تغییر خواهد کرد

تحلیل حساسیت



در ادامه خواهیم برخی از عواملی که می‌توانند سبب تغییر [illegible] را بررسی کنیم

۱) اضافه کردن محدودیت

۲) اضافه کردن متغیر

۳) حذف محدودیت

۴) حذف متغیر

۵)

$P_1: \max z = cx$

$Ax \le b$

$x \ge 0$

$P_2: \max z = cx$

$Ax \le b+1$

$x \ge 0$

صنایع ۸۱ - اثر [illegible]

۱) [illegible]

۲) [illegible]

۳) [illegible]

Scanned by CamScanner

سیخ ۱۷، ۲۷، ۵۷:

$P_1: \max z = cx$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

$P_2: \max z' = cx + c_{n+1} x_{n+1}$

$Ax + k x_{n+1} \leq b$

$x \geq 0, x_{n+1} \geq 0$

۱) $z < z'$

۲) $z > z'$

۳) $z \leq z'$ ✓

۴) $z \geq z'$

صنایع، سیخ ۴۷، ۵۷، صنایع ۱۱

$P_1: \max z = cx$

$\sum p_j x_j \leq E$

$p \geq 0, x \geq 0$

$P_2: \max z' = cx$

$\sum p'_j x_j \leq E$

$p', x \geq 0$

و همین داریم:

$p'_j \geq p$

۱) $z' < z$

۲) $z' > z$

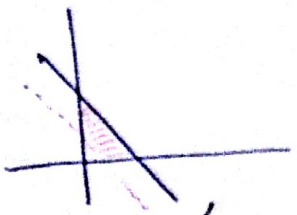
۳) $z' \leq z$ ✓

۴) $z' \geq z$

$P_1: \max z = cx$

$\sum p_j x_j \leq E$

$p \geq 0, x \geq 0$



۱) $z' > z$

۲) $z' < z$

Scanned by CamScanner

۸۹ در مثال قبل اگر $\rho_2 > \rho$ جواب چی؟

سوال ۹۱:

$z_1 = \min 3x_1 + 4x_2$

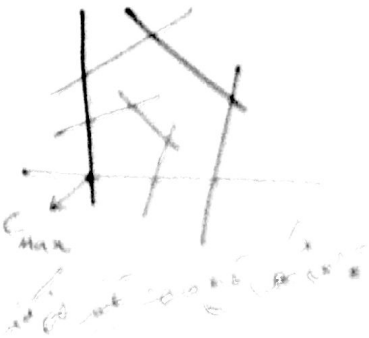
$g(x_1, x_2) = 5$

$x \geq 0$

$z_2 = \min 2x_1 + 5x_2$

$g(x_1, x_2) = 5$

$x \geq 0$



۱) $z_1 \geq z_2$

۲) $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{1}{2}$

۳) $\frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1} = \frac{1}{8}$

۴) ✓ $z_2 \geq z_1$

سوال ۹۰.

$z_1 = \min f(x_1, \dots, x_n)$

$\sum p_i x_i \leq E_1$

$z_2 = \min f(x_1, \dots, x_n)$

$\sum p_i x_i \leq E_2$

اگر $E_2 > E_1$ باشد:

۱) $z_2 \geq z_1$

۲) ✓ $z_2 \leq z_1$

۳) $z_2 > z_1$

۴) $z_2 < z_1$

Scanned by CamScanner